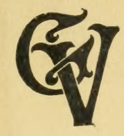
Laurent, Hermann
L'élimination

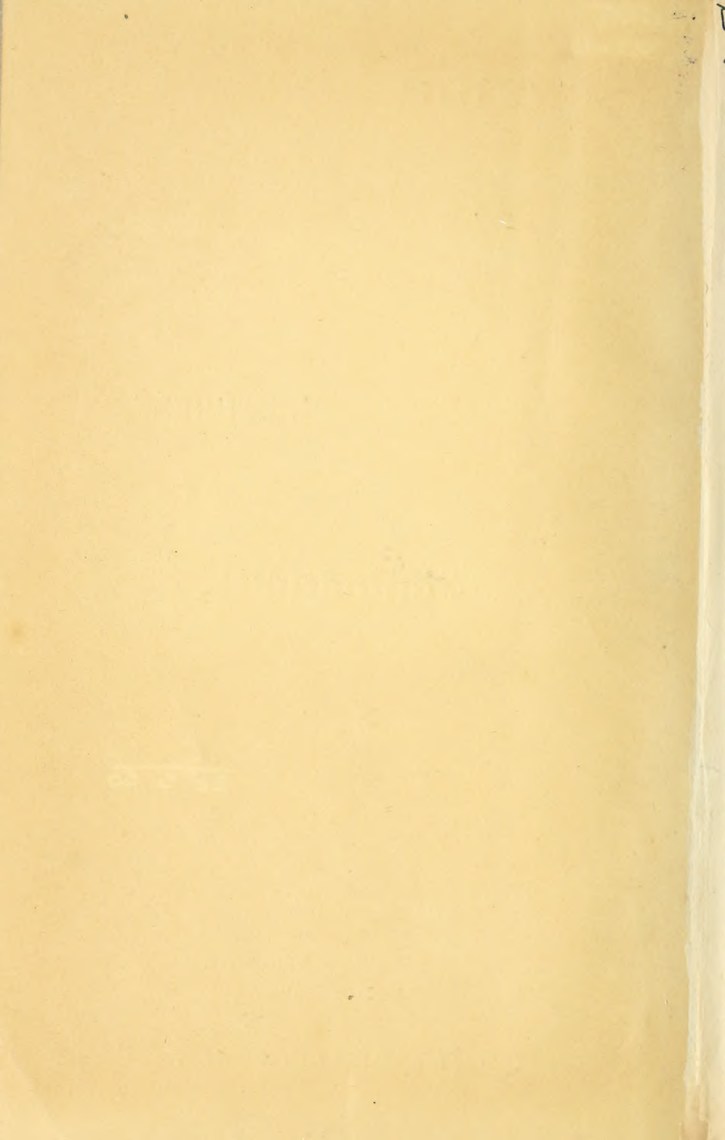
Scientia

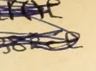


H. LAURENT

L'Élimination

N° 7 *GAUTHIER-VILLARS et Cie, Éditeurs*





SCIENTIA

Mars 1900

Phys.-Mathématique

n° 7

L'ÉLIMINATION

PAR

H. LAURENT



TABLE DES MATIÈRES

L'ÉLIMINATION

INTRODUCTION

Il n'existe je crois qu'une seule monographie sur la théorie de l'élimination ; elle a été publiée en 1859 par le chevalier Fàa de Bruno ; depuis, cette théorie s'est beaucoup simplifiée, et aucun livre d'algèbre ne contient sur cette matière tous les développements qu'elle comporte. Je crois donc faire œuvre utile en résumant toutes les méthodes connues et en en faisant connaître un certain nombre que je crois nouvelles.

Le problème de l'élimination a surtout pour but, ou au moins, avait autrefois pour but la résolution des équations algébriques à plusieurs inconnues, il avait pour but de remplacer un système d'équations par d'autres équivalentes et dont l'une, ne contenant plus qu'une inconnue, permettait alors d'en trouver les diverses valeurs. Mais ce but s'est beaucoup élargi, et l'on peut dire que le problème de l'élimination a pour but, étant données des fonctions entières f_0, f_1, f_2, ... f_n de n variables x_1, x_2, ... x_n, de trouver une fonction R des

coefficients de f_0, f_1 ... f_n : 1° qui soit entière par rapport à ces coefficients ; 2° qui puisse se mettre sous la forme

$$R = \lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 \cdots + \lambda_n f_n$$

λ_0, λ_1 ... désignant des polynômes entiers par rapport à x_1, x_2 ... x_n et aux coefficients de f_0, f_1 ... f_n ; 3° qui soit de degré minimum par rapport à ces coefficients. Cette fonction R dont l'existence sera démontrée est l'*éliminant* ou le *résultant* de f_0, f_1, ... f_n.

CHAPITRE PREMIER

ÉLIMINATION ENTRE DEUX ÉQUATIONS

1. **Notions préliminaires.** — Toute équation algébrique de degré n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

dans laquelle a_0, a_1,... désignent des quantités indépendantes de x dont la première n'est pas nulle, admet comme l'on sait n racines réelles ou imaginaires de la forme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, que nous appellerons α_1, α_2... α_n ; nous désignerons par $f(x)$ le premier membre de cette équation et nous aurons

$$f(x) = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n),$$

et en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres,

$$(1) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-\alpha_1} + \frac{1}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{1}{x-\alpha_n}.$$

Chacune des fractions simples qui entrent dans le second membre est développable sous la forme

$$\frac{1}{x-\alpha_i} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha_i}{x^2} + \frac{\alpha_i^2}{x^3} + \dots ;$$

pourvu que le module de x soit supérieur au module maximum des racines, et si l'on pose

$$s_0 = n = \Sigma\alpha^0, \qquad s_1 = \Sigma\alpha, \dots \qquad s_p = \Sigma\alpha^p, \dots$$

on aura

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \ldots + \frac{s_p}{x^{p+1}} + \ldots$$

En sorte que la fonction s_p sera le coefficient de $\frac{1}{x^{p+1}}$ dans le développement de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{x}$.

Chacun des termes du second membre de (1) peut aussi se développer comme il suit

$$\frac{1}{x - \alpha_i} = -\left[\frac{1}{\alpha_i} + \frac{x}{\alpha_i^2} + \frac{x^2}{\alpha_i^3} \ldots\right].$$

pourvu que le module de x soit inférieur au module minimum des racines α_1, α_2..., en sorte que si l'on pose

$$s_{-p} = \Sigma\alpha_i^{-p},$$

on aura

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -s_{-1} - s_{-2}x - s_{-3}x^2 \ldots,$$

et $-s_{-p}$ *sera le coefficient de x^{p-1} dans le développement de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ordonné suivant les puissances croissantes de x.*

Plus généralement : *Si l'on désigne par $\varphi(x)$ un polynôme entier en x, le reste de la division de $\varphi(x)$ par $f(x)$ sera*

$$(2) \quad f(x)\left[\frac{\varphi(\alpha_1)}{(x-\alpha_1)f'(\alpha_1)} + \ldots + \frac{\varphi(\alpha_n)}{(x-\alpha_n)f'(\alpha_n)}\right] = \mathrm{R}(x).$$

En effet il existe un polynôme Q tel que

$$(3) \qquad \varphi(x) = \mathrm{Q}f(x) + \mathrm{R}.$$

Si dans cette formule on fait $x = \alpha_i$, on a $f(x) = \mathrm{R}(\alpha_i)$; $\mathrm{R}(x)$ est donc complètement déterminé par cette condition qu'il se réduit à $f(\alpha_i)$ pour $x = \alpha_i$ puisqu'il est du degré $n - 1$ au plus et le premier membre de (1) jouit précisément de cette propriété, il est déterminé par ce que l'on appelle la formule d'interpolation de Lagrange, dont nous aurons à faire un fréquent usage dans la suite.

On peut donc, des formules (2) et (3), conclure

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = Q + \frac{R}{f(x)} = Q + \Sigma \frac{\varphi(\alpha_p)}{(x-\alpha_p)f'(\alpha_p)},$$

et en changeant $\varphi(x)$ en $\varphi(x)f'(x)$

$$(4) \qquad \frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)} = Q + \Sigma \frac{\varphi(\alpha_p)}{x-\alpha_p}.$$

Si l'on suppose le module de x suffisamment grand, on aura toujours

$$\frac{1}{x-\alpha_p} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha_p}{x^2} + \frac{\alpha_p^2}{x^3} + \ldots.$$

et (4) deviendra

$$\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)} = Q + \frac{\Sigma\varphi(\alpha_p)}{x} + \frac{\Sigma\alpha\varphi(\alpha_p)}{x^2} + \ldots$$

En sorte que $\Sigma\varphi(\alpha_p)$ est le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{\varphi(x)f'(x)}{f(x)}$ ordonné suivant les puissances décroissantes de x.

2. **Développement d'une fonction rationnelle en série.** — Considérons une fonction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, on sait qu'elle est développable en une somme d'éléments simples de la forme Ax^p et $\frac{B}{(x-\alpha)^q}$ en nombre fini, A, B, α désignant des constantes qui peuvent être quelconques et p, q désignant des entiers; si x est de module suffisamment grand [plus grand que le plus grand des modules des racines de $f(x)=0$] $\frac{1}{(x-\alpha)^q}$ est développable sous la forme

$$(x-\alpha)^{-q} = x^{-q} + \frac{q}{1}x^{-q-1}\alpha + \frac{q(q+1)}{1.2}x^{-q-2}\alpha^2 + \ldots$$

donc $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ peut se développer lui-même suivant les puissances décroissantes de x en une série convergente, et cela d'une seule manière (toujours en supposant module (x) supérieur au plus

grand des modules des racines de $f(x) = 0$. Pour effectuer ce développement il n'est pas nécessaire de connaître les racines de $f(x) = 0$, il suffit de poser

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0 + \frac{b_{-1}}{x} + \frac{b_{-2}}{x^2} + \dots$$

et, en supposant $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, on a

$$\varphi(x) = \left(b_k x^k + \dots b_0 + \frac{b_{-1}}{x} + \frac{b_{-2}}{x^2} \dots\right)(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots).$$

En égalant de part et d'autre les coefficients des mêmes puissances de x, on a, en appelant m le degré de $\varphi(x)$ et d_m, d_{m-1}... ses coefficients $(m = k + n)$:

$$d_m = a_0 b_k,$$
$$d_{m-1} = a_0 b_{k-1} + a_1 b_k,$$
$$d_{m-2} = a_0 b_{k-2} + a_1 b_{k-1} + a_2 b_k,$$

. . . .

La première équation donne *toujours* b_k, car a_0 est différent de zéro, la seconde b_{k-1} et ainsi de suite. Il faut d'ailleurs remarquer que le développement sera récurrent, c'est-à-dire qu'à partir d'un certain moment dans les équations obtenues les coefficients des inconnues b_p seront toujours les mêmes (affectés à des inconnues différentes). Enfin il est bon de remarquer que l'application de la méthode des coefficients indéterminés revient au fond à l'application de la règle de la division des polynômes.

3. **Formules de Newton.** — Appliquons les considérations précédentes à la recherche des sommes des puissances semblables des racines de l'équation $f(x) = 0$ ou

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

en posant s_i égal à la somme des puissances i des racines on aura (§ 1er) :

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \dots$$

ou

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots = (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots)\left(\frac{s_0}{x} + \frac{s_1}{x^2} + \dots\right).$$

et, en identifiant,

$$\begin{aligned}
n &= s_0, \\
(n-1)a_1 &= a_1s_0 + a_0s_1, \\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
&n = s_0, \\
&a_0s_1 + a_1 = 0, \\
&a_0s_2 + a_1s_1 + 2a_2 = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&a_0s_n + a_1s_{n-1} \dots + na_n = 0, \\
&\dots\dots\dots\dots \\
&a_0s_p + a_1s_{p-1} + \dots + a_n s_{p-n} = 0.
\end{aligned}$$

Ce sont les formules de Newton, qui donnent de proche en proche s_1, $s_2, \dots s_n, \dots s_p \dots$ ou au moyen de déterminants. Nous en déduirons en particulier la formule importante qui donne $\frac{a_n}{a_0}$ en fonction de s_0, s_1, $s_2 \dots s_n$:

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\begin{vmatrix} s_1, & 1, & 0, & 0 & \dots 0 \\ s_2, & s_1, & 2, & 0 & \dots 0 \\ s_3, & s_2, & s_1, & 3 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n, & s_{n-1}, & s_{n-2}, & s_{n-3} & \dots s_1 \end{vmatrix}.$$

L'importance de cette formule consiste dans ce fait qu'elle fournit le produit $\pm \frac{a_n}{a_0}$ des quantités α_1, $\alpha_2 \dots \alpha_n$ en fonction des sommes $\Sigma\alpha$, $\Sigma\alpha^2$, ... $\Sigma\alpha^n$ et l'on a

$$(1) \qquad \Pi\alpha = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} s_1 & 1, & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_n & s_{n-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix}$$

Nous en ferons bientôt usage.

4. Définition précise du Résultant. — *Première méthode de calcul.* — Soient $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ les deux polynômes

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots a_m,$$
$$\psi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{m-1} + \dots b_n ;$$

soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m$ les racines de $\varphi(x) = 0$; $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_n$ celles de $\psi(x) = 0$.

On a les identités

$$\Pi(\alpha_i - \beta_k) = \frac{1}{b_0^m} \psi(\alpha_1)\psi(\alpha_2) \dots \psi(\alpha_m)$$
$$= \frac{(-1)^n}{a_0^n} \varphi(\beta_1)\varphi(\beta_2) \cdots \varphi(\beta_n),$$

ou

$$a_0^n \psi(\alpha_1) \dots \psi(\alpha_m) = b_0^m \varphi(\beta_1) \dots \varphi(\beta_n)(-1)^n .$$

$\alpha_0^n \psi(\alpha_1) \dots \psi(\alpha_m)$ sera ce que j'appellerai le *résultant* de ψ et de φ ; $b_0^m \varphi(\beta_1) \dots$ sera le *résultant* de φ et de ψ, ces deux résultants sont égaux ou égaux et de signes contraires, *ils sont homogènes et de degré m par rapport aux coefficients de ψ, homogènes et de degré n par rapport aux coefficients de φ.*

Nous avons immédiatement des méthodes pour le calcul du résultant : nous avons vu que l'on pouvait calculer facilement par une simple division (§ 1 et 2) les sommes $\Sigma\, \psi(\alpha)$, $\Sigma\, [\psi(\alpha)]^2$, $\Sigma\, [\psi(\alpha)]^3 \dots$, et nous avons vu au paragraphe précédent comment au moyen d'un déterminant on pouvait calculer le produit de quantités données connaissant la somme de leurs puissances semblables.

Voici une seconde méthode :

5. Seconde méthode. — Le déterminant (en conservant les notations du paragraphe précédent)

$$P(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) = \begin{vmatrix} 1, & 1 \dots & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2 \dots & \alpha_m \\ \alpha_1^2, & a_2^2 \dots, & \alpha_m^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-1}, & \alpha_2^{m-1} \dots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

est égal au produit de toutes les différences telles que $\alpha_i - \alpha_j$, comme il est facile de s'en convaincre en observant qu'il s'an-

nule pour $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_m$, qu'il est divisible par suite par $\alpha_1 - \alpha_2$, $\alpha_1 - \alpha_3$, ..., de même par tous les binômes $\alpha^i - \alpha^j$; il est de degré $\frac{m(m-1)}{2}$ comme le produit de ces différences ; enfin le terme $\alpha_2\,\alpha_3^2 \ldots \alpha_m^{m-1}$ a le même coefficient que dans le produit des différences, quand on effectue convenablement ces différences. Si l'on pose $s_i = \Sigma\,\alpha^i$, on aura :

$$(1) \qquad \mathrm{P}^2(\alpha_1, \alpha_2 \ldots) = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \ldots & s_{m-1} \\ s_1, & s_2, & s_3 \ldots & s_m \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ s_{m-1} & s_m, & s_{m+1} \ldots & s_{2m-2} \end{vmatrix}$$

formule importante dont on fait un fréquent usage. Cela posé, le résultant de φ et ψ est au signe près

$$a_0^n\,b_0^m\,\Pi(\alpha_i - \beta_j) = \frac{\mathrm{P}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \beta_1, \beta_2 \ldots)}{\mathrm{P}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots)\,\mathrm{P}(\beta_1, \beta_2 \ldots)}\,\alpha_0^n\,b_0^m$$

Le numérateur de la fraction qui figure au second membre, est le produit des différences des racines de l'équation $\varphi(x)\,\psi(x) = 0$, on sait le calculer ; on sait calculer d'une façon analogue les deux facteurs du dénominateur. Le résultant peut donc être calculé ainsi. Je ne cite cette méthode que pour être complet, elle sera en général beaucoup trop compliquée, elle est d'ailleurs tout à fait dépourvue d'élégance.

6. Troisième méthode. — On a

$$\mathrm{P}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)\,\psi(\alpha_1) \ldots \psi(\alpha_m) = \begin{vmatrix} \psi(\alpha_1), & \psi(\alpha_2) \ldots & \psi(\alpha_m) \\ \alpha_1\psi(\alpha_1), & \alpha_2\psi(\alpha_2) \ldots & \alpha_m\psi(\alpha_m) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-1}\psi(\alpha_1), & \ldots & \alpha_m^{m-1}\psi(\alpha_m) \end{vmatrix}$$

Multiplions cette équation membre à membre avec la suivante :

$$\mathrm{P}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) = \begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2 \ldots & \alpha_m \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{m-1} & \ldots & \alpha_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

et nous aurons en vertu de (1)

$$\mathrm{P}^2(\alpha_1 \ldots)\,\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2) \ldots \psi(\alpha_m) = \begin{vmatrix} \Sigma\psi(\alpha), & \Sigma\alpha\psi(\alpha) \ldots & \Sigma\alpha^{m-1}\psi(\alpha) \\ \Sigma\alpha\psi(\alpha), & \Sigma\alpha^2\psi(\alpha) & \ldots\ldots \\ \Sigma\alpha^{m-1}\psi(\alpha), & \Sigma\alpha^m\psi(\alpha) & \ldots\ldots \end{vmatrix}$$

d'où l'on déduit $\Pi\psi(\alpha)$ et par suite le résultant. Et on a vu comment on calculait P et les éléments $\Sigma\,\alpha^i\psi(\alpha)$ du déterminant qui figure dans cette formule.

Cette méthode déjà plus simple n'exige plus que deux divisions.

7. **Quatrième méthode**. — Voici une méthode très générale et qui contient comme cas particuliers d'autres méthodes enseignées par Euler, Bezout, Cauchy et Cayley.

Conservant toujours les mêmes notations, divisons $\theta_1(x)\,\psi(x)$, $\theta_2(x)\,\psi(x), \ldots \theta_m(x)\,\psi(x)$ par $\varphi(x)$, en désignant par θ_1, $\theta_2 \ldots$ des polynômes linéairement distincts, c'est-à-dire tels qu'il n'existe pas d'identité de la forme

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 \ldots + \lambda_m\theta_m = 0$$

λ_1, $\lambda_2 \ldots \lambda_m$ désignant des quantités indépendantes de x et de degré $m - 1$ au plus. Désignons par q_1, $q_2 \ldots q_m$ les quotients et par $c_{i1} + c_{i2}x + \ldots + c_{im}x^{m-1}$, les restes, nous aurons

$$\theta_1\psi - q_1\varphi = c_{11} + c_{12}x + \ldots + c_{1m}x^{m-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\theta_m\psi - q_m\varphi = c_{m1} + c_{m2}x + \ldots + c_{mm}x^{m-1};$$

posons

$$\mathrm{C} = \Sigma \pm c_{11}c_{22} \ldots c_{mm},$$

puis faisons successivement $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, nous aurons m^2 équations telles que

$$\theta_i(\alpha_j)\,\psi(\alpha_j) = c_{i1} + c_{i2}\alpha_j + \ldots c_{im}\alpha_j^{m-1},$$

qui montrent que l'on a

$$\Pi\psi(\alpha_j)\,\Sigma \pm \theta_1(\alpha_1)\,\theta_2(\alpha_2) \ldots \theta_m(\alpha_m) = \mathrm{CP}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m);$$

et par suite

$$\Pi\psi(\alpha_j) = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{P}(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)}{\Sigma \pm \theta_1(\alpha_1) \ldots \theta_m(\alpha_m)}.$$

C est donc, à un facteur près d'ailleurs facile à calculer, le résultant cherché.

Un choix judicieux des fonctions θ peut considérablement simplifier les calculs.

Choisissons $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = x$, $\theta_3 = x^2 \ldots \theta_m = x^{m-1}$, on aura $\Sigma \pm \theta_1(\alpha_1)\theta_2(\alpha_2)\ldots = P(\alpha_1, \alpha_2 \ldots)$ (§ 5) et par suite

$$\Pi\psi(\alpha_i) = C.$$

Cette méthode a l'avantage de n'exiger qu'une division, celle de ψ par φ.

8. **Cinquième méthode de Cauchy**. — Bien que Cauchy n'ait pas exposé sa méthode en suivant la marche que nous allons indiquer, c'est je crois la façon la plus lumineuse de la présenter.

Et d'abord rien n'empêche de supposer $m = n$; pour obtenir le résultant sous la forme donnée par Cauchy, il suffit de prendre pour les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots$ les coefficients successifs du quotient de la division de $\varphi(y)$ par $y - x$; on a, en effet

$$\psi(x)\frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x} - \varphi(x)\frac{\psi(y) - \psi(x)}{y - x}$$

$$= \frac{\psi(x)\varphi(y) - \psi(y)\varphi(x)}{y - x} = X_0 + X_1 y \ldots + X_{m-1} y^{m-1};$$

$X_0, X_1 \ldots X_{m-1}$ désignant des polynômes entiers en x, des degrés $m - 1, \ldots, 0$ respectivement ; le coefficient X_i est la somme de deux polynômes φ_i et ψ_i et φ_i est le coefficient de y_i dans le quotient de $\varphi(y)$ ou de $\varphi(y) - \varphi(x)$ par $y - x$; ψ_i est le coefficient de y_i dans le quotient de $\psi(y)$ par $y - x$; on a donc

$$(2) \qquad \psi(x)\varphi_i(x) - \varphi(x)\psi_i(x) = X_i.$$

X_i est de degré $m - 1$, c'est le reste de la division de $\psi(x)\varphi_i(x)$ par $\varphi(x)$ et $\psi_i(x)$ est le quotient. Si donc on pose

$$X_i = c_{i0} + c_{i1}x + \ldots + c_{i(m-1)}x^{m-1},$$

on aura

$$(1) \quad \psi(x)\varphi_i(x) - \varphi(x)\psi_i(x) = c_{i0} + c_{i1}x + \ldots + c_{i\,m-1}x^{m-1};$$

et comme plus haut (§ 7), en posant

$$C = \Sigma \pm c_{00} c_{11} \dots,$$

on aura

$$(2) \qquad \psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\dots\psi(\alpha_m) = \frac{C P(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_m)}{\Sigma \pm \varphi_0(\alpha_1)\dots\varphi_{m-1}(\alpha_m)}.$$

Or le déterminant qui figure au dénominateur est égal à

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_0 \dots \\ a_0\alpha_1 + a_1 & a_0\alpha_2 + a \dots \\ \dots & \\ a_0\alpha_1^{m-1} + a_1\alpha^{m-2} \dots + a_{m-1}, & a_0\alpha_2^{m-1} \dots + a_{m-1} \dots \end{vmatrix}$$

ou en combinant convenablement les lignes

$$a_0^m P(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_m).$$

La formule (2) montre alors que dans le cas actuel C est rigoureusement le résultant de ψ et de φ.

Ce résultat nous conduit à approfondir tout particulièrement la méthode de Cauchy.

Si nous multiplions les deux membres de (1) par $\frac{\partial C}{\partial c_{i1}}$, si nous faisons $i = 1, 2, \dots m$ et si nous ajoutons les résultats ainsi obtenus, nous trouvons

$$\psi(x)\left[\dots \varphi_1(x)\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + \varphi_2(x)\frac{\partial C}{\partial c_{22}} + \dots\right]$$
$$- \varphi(x)\left[\dots \psi_1(x)\frac{\partial C}{\partial c_{11}} + \dots\right] = C.$$

Ce qui montre que le résultant est de la forme

$$\lambda\psi(x) - \mu\varphi(x),$$

λ et μ désignant des polynômes de degrés $m - 1$. (En général λ sera de degré inférieur au degré de φ, le degré de μ sera inférieur à celui de ψ.)

Le polynôme X_i second membre de l'équation (λ), est comme on l'a vu le coefficient de y_i dans

$$(3) \qquad \frac{\psi(x)\varphi(y) - \psi(y)\varphi(x)}{y - x} = \Theta(x^0, x, x^2, \dots y^0, y, y^2 \dots)$$

que nous pouvons considérer comme une fonction bilinéaire de $x^0 = 1, x, \dots x^{n-1}, y^0, \dots y^{n-1}$, en sorte que

$$X_i = \frac{\partial \Theta}{\partial y^i}.$$

Or la fonction Θ ne change pas quand on change x en y et y en x, et quand on y suppose $y = x$, elle se change en une fonction du second degré en $x^0, x^1, \dots x^{n-1}$, dont la demi-dérivée prise par rapport à x^i, est encore X_i, il en résulte que C est le discriminant de cette fonction du second degré et que C est un déterminant symétrique.

Le polynôme Θ peut se décomposer en carrés comme il suit ; si l'on observe que

$$\psi(x) = h + \Sigma \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{\varphi(x)}{x-\alpha}, \qquad \psi(y) = h + \Sigma \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{\psi(y)}{y-\alpha},$$

h désignant une constante, on a

$$\Theta = \frac{\psi(x)\varphi(y) - \varphi(x)\psi(y)}{y-x} = \Sigma \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{y-x} \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$$
$$\left[\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{y-\alpha}\right] = \Sigma \frac{\varphi(x)\varphi(y)\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} \frac{1}{(x-\alpha)(y-\alpha)}$$
$$= \Sigma \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} [x^0\varphi_0(\alpha) + x^1\varphi_1(\alpha) + x^2\varphi_2(\alpha)\dots][y^0\varphi_0(\alpha)\dots].$$

Si l'on pose

$$x^0 = y^0 = x_0, \qquad x = y = x_1, \qquad x^2 = y^2 = x_2 \dots$$

la fonction dont C est le discriminant est

$$\Sigma \frac{\psi(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} [x_0\varphi_0(\alpha) + \dots + x_{n-1}\varphi_{n-1}(\alpha)]^2.$$

Si nous posons

$$\varphi(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m$$
$$\psi(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_m,$$
$$a_ib_j - b_ia_j = h_{ij},$$

nous aurons

$$\psi\varphi_0 - \varphi\psi_0 = h_{01}x^{m-1} + h_{02}x^{m-2} + \dots h_{0m},$$
$$\psi\varphi_1 - \varphi\psi_1 = (h_{02} + h_{11})x^{m-1} + (h_{03} + h_{12})x^{m-2} + \dots$$

. . . .

de sorte que le déterminant C pourra se mettre sous la forme suivante, en supposant nuls tous les h_{ij} dans lesquels $i = j$ et dans lesquels i ou j est supérieur à m.

$$(4) \qquad C = \begin{vmatrix} h_{01}, & h_{02}, & \ldots & h_{0m} \\ h_{02} + h_{11}, & h_{03} + h_{12}, & \ldots & h_{0m+1} + h_{1m} \\ h_{03} + h_{12} + h_{21} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{0m} + h_{1,m-1} + \ldots & h_{m-1,1} & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

La belle méthode de Cauchy subsiste quand m est différent de n, mais elle perd une grande partie de son élégance. Supposons $m > n$, on formera comme plus haut les polynômes

$$\psi(x)\,\varphi_0(x) - \varphi(x)\,\psi_0(x) = c_{01} + c_{02}x + \ldots.$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\psi(x)\,\varphi_{n-1}(x) - \varphi(x)\,\psi_{n-1}(x) = c_{n-1,1} + c_{n-1,2}x + \ldots.$$

puis au lieu de considérer les polynômes $\psi(x)\,\varphi_n(x) - \psi_n(x)\,\varphi(x)\ldots$, on considère les polynômes $\psi(x)\,x^n$, $\psi(x)\,x^{n+1}$, ... $\psi(x)\,x^{m-1}$, ce qui est plus simple.

Nous appellerons poids d'une fonction des a_i et des b_j le degré de cette fonction pris par rapport à des variables réelles ou fictives $z, y, \ldots$ dont nous supposerons ces coefficients fonctions, alors a_i et b_j seront supposés de degrés ou de poids i et j par rapport aux $y, z, \ldots$

En supposant $m > n$ et φ de degré m, ψ de degré n, on voit que les éléments de C des n premières lignes, sont de poids respectifs.

$$\begin{array}{l} 1,\ 2,\ 3\ldots\ m, \\ 2,\ 3,\ 4\ldots\ m+1, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ m, n+1\ n+2\ldots\ m+n. \end{array}$$

Les poids des éléments des $m - n$ lignes restantes seront au plus égaux à n, donc le poids de C sera au plus égal à

$$1 + 3 + 5 \ldots + (2n - 1) + (m - n)\,n = n^2 + mn - n^2 = mn.$$

Le poids du résultant de deux polynômes est donc au plus égal au produit de leurs degrés.

Enfin on voit à l'inspection de C, que *le résultant est une fonction des* $a_i b_j - b_i a_j$.

9. **Sixième méthode.**— On peut encore mettre le résultant des deux polynômes φ et ψ, sous une forme qui ne contient pas explicitement les coefficients des polynômes, mais seulement les valeurs numériques que prennent ces polynômes quand on donne des valeurs particulières à la variable.

Reprenons les notations du paragraphe précédent, et supposons que le degré m de φ soit égal ou supérieur au degré n de ψ. Soient $\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_m$ des nombres arbitraires et indépendants des coefficients de φ et ψ. Posons

$$F(x) = (x - \gamma_1)(x - \gamma_2) \dots (x - \gamma_m),$$
$$\xi_i = \frac{F(x)}{x - \gamma_i} \frac{1}{F'(\gamma_i)},$$

on aura, en vertu de la formule d'interpolation de Lagrange

$$\theta_i = \frac{\varphi(x)\psi(\gamma_i) - \psi(x)\varphi(\gamma_i)}{x - \gamma_i} = \theta_{i1}\xi_1 + \theta_{i2}\xi_2 + \dots + \theta_{im}\xi_m,$$

en posant pour abréger

$$\theta_{ij} = \theta_i(\gamma_j) = \theta(\gamma_i).$$

Si nous faisons alors

$$C = \Sigma \pm \gamma_{11}\gamma_{22} \dots \gamma_{mm},$$

nous aurons en désignant par $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_m$ les racines de $\varphi(x) = 0$, m^2 équations telles que

$$\theta_i(\alpha_j) = \theta_{i1}\xi_{1j} + \theta_{i2}\xi_{2j} \dots + \theta_{im}\xi_{mj},$$

où ξ_{pj} désigne la valeur de ξ_p pour $x = \alpha_j$. Ces équations montrent que

$$\Sigma \pm \theta_1(\alpha_1)\,\theta_2(\alpha_2) \dots \theta_m(\alpha_m) = C\,\Sigma \pm \xi_{11}\xi_{22} \dots \xi_{mm}.$$

Or, $\theta_i(\alpha_j)$ est égal à $\dfrac{\psi(\alpha_j)\varphi(\gamma_i)}{\alpha_j - \gamma_i}$ et ξ_{ij} est égal à $\dfrac{F(\alpha_j)}{\alpha_j - \gamma_i}\dfrac{1}{F'(\alpha_i)}$; l'équation précédente donne alors

$$\frac{\Pi\psi(\alpha)\,\Pi\varphi(\gamma)}{\Delta} = C\,\frac{\Pi F(\alpha)}{\Delta\Pi F'(\gamma)}.$$

$\frac{1}{\Delta}$ désignant le déterminant dont l'élément général est

$$\frac{1}{\gamma_i - \alpha_j}.$$

et l'on a

$$\Pi\psi(\alpha_j).a_0''=\frac{C}{\Pi\, F'(\gamma)},$$

en observant que $a_0''\,\Pi\, F(\alpha) = \Pi\, \varphi(\gamma)$. D'ailleurs $\Pi F'(\gamma)$ est le produit des carrés des différences $\gamma_i - \gamma_j$. C est donc le résultant à un facteur près indépendant des coefficients de φ et de ψ.

10. **Septième méthode.** — Nous avons vu que le résultant de φ et de ψ pouvait se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \lambda\varphi - \mu\psi = C,$$

λ et μ étant de degrés respectivement inférieurs à ψ et à φ. Les polynômes λ et μ sont bien déterminés. En effet, si l'on avait

$$\lambda'\varphi - \mu'\psi = C,$$

on en conclurait

$$(\lambda - \lambda')\,\varphi - (\mu - \mu')\,\psi = 0.$$

Si φ et ψ n'ont pas de facteur commun, $\lambda - \lambda'$ s'annulera toutes les fois que $\psi = 0$, or c'est absurde puisque λ et λ' sont de degrés inférieurs à φ. Si φ et ψ ont un facteur commun, la formule (1) ne peut plus avoir lieu que pour $C = 0$, les polynômes λ, μ existent encore mais ils ne sont plus déterminés qu'à un facteur près.

La méthode des coefficients indéterminés peut alors être employée pour déterminer C, λ et μ, il suffit de poser

$$\begin{aligned}
\varphi &= a_0\, x^m + a_1 x^{m-1} + \dots,\\
\psi &= b_0\, x_n + b_1 x^{n-1} + \dots,\\
\lambda &= p_0\, x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \dots;\\
\mu &= q_0\, x^{m-1} + q_1 x^{m-2} + \dots;
\end{aligned}$$

en portant ces valeurs dans (1) et en identifiant on a

$$a_0 p_0 - b_0 q_0 = 0;\ \dots\ a_m\, p_{n-1} - b_n\, q_{m-1} = C.$$

Ces équations au nombre de $m+n$ permettant de calculer les $m+n$ quantités $p_0 \dots p_{n-1}$, $q_0 \dots q_{m-1}$ et C à un facteur près; on trouve ce facteur en observant que pour $a_0 = a_1 \dots = a_{n-1} = 0$, $C = b_0^m a_m^n$.

On peut varier à l'infini la méthode des coefficients indéterminés, on peut par exemple différentier l'équation (1) $m+n-1$ fois et faire chaque fois $x = a$; on peut encore poser

$$f(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\dots(x-\gamma_p),\ (p = m+n),$$
$$\xi_i = \frac{f(x)}{x-\gamma_i}\,\frac{1}{f'(\gamma_i)}$$

on a alors

$$\lambda(x)\varphi(x) - \mu(x)\psi(x) = \Sigma[\lambda(\gamma_i)\varphi(\gamma_i) - \mu(\gamma_i)\psi(\gamma_i)]\xi_i\,,$$

$$\sum \frac{\lambda(\gamma_i)}{f'(\gamma_i)} = 0\,,\ \sum \gamma_i \frac{\lambda(\gamma_i)}{f'(\gamma_i)} = 0\,,\ \dots\ \sum \gamma_i^{n-1}\frac{\lambda(\gamma_i)}{f'(\gamma_i)} = 0\,,$$

$$\sum \frac{\mu(\gamma_i)}{f'(\gamma_i)} = 0\ \dots\dots\dots\dots\ \sum \gamma_i^{m-1}\frac{\mu(\gamma_i)}{f'(\gamma_i)} = 0\,,$$

et comme $\xi_1 + \xi_2 \dots = 1$.

$$\lambda(\gamma_i)\varphi(\mu_i) - \mu(\gamma_i)\psi(\gamma_i) = C$$

Cette dernière équation en fournit $m+n$, elles déterminent les rapports $\frac{\lambda(\gamma_i)}{C}$ et $\frac{\mu(\gamma_i)}{C}$ en y adjoignant les précédentes, et par suite λ et μ, au moyen de la formule d'interpolation de Lagrange.

11. **Indication rapide d'autres méthodes.** — Sylvester observe que

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(x) &= a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots\,,\\
x\varphi(x) &= a_0x^{m+1} + a_1x^m + \dots\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x^{n-1}\varphi(x) &= a_0x^{m+n-1} + \dots\,,\\
\psi(x) &= b_0x^n + b_1x^{n-1}\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
x^{m-1}\psi(x) &= b_0x^{n+m-1} + \dots\,.
\end{aligned}\right\}\quad (1)$$

Si l'on désigne par Δ le déterminant des coefficients des

seconds membres, il n'est pas difficile de voir, en résolvant ces équations par rapport à x^m, que Δ est de la forme $\lambda\varphi - \mu\psi$, λ étant de degré $n-1$ et μ de degré $m-1$; la valeur de Δ pour $a_0 = a_1 \ldots = a_{n-1} = 0$ est $a_0^n b_0^m$, donc, etc.

On peut aussi remplacer les seconds membres des équations (1) par leurs valeurs en fonction des quantités ξ considérées au paragraphe précédent et prendre le déterminant des coefficients des ξ, mais on introduit ainsi dans le résultant un facteur, indépendant il est vrai des a et des b.

12. **Résolution d'un système à deux inconnues.** — Considérons les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m = 0\,, \\ \psi(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n = 0\,. \end{cases}$$

Pour exprimer que ces équations ont une solution commune il suffit d'exprimer que l'on a l'une des relations

$$\psi(\alpha_1) = 0,\ \psi(\alpha_2) = 0 \ldots \psi(\alpha_n) = 0$$

$\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ désignant les racines de $\varphi(x) = 0$, ou

$$\Pi\,\psi(\alpha) = 0$$

Il suffit donc d'égaler à zéro le résultant de φ et ψ.

Soient $\theta_0, \theta_1, \ldots \theta_m$ des polynômes de degrés $0, 1, 2, \ldots m-1$ respectivement, et $m \geqq n$. Divisons $\psi\,\theta_0$, $\psi\,\theta_1 \ldots$ par φ, et soit en général q_i le quotient et

$$c_{i0} + c_{i1}x + \ldots c_{i,m-1} = r_i\,,$$

le reste de la division de $\psi\,\theta_i$ par φ, on aura

$$(2)\quad \begin{cases} \theta_0\,\psi - q_0\varphi = c_{00} + c_{01}x + \cdots\,, \\ \theta_1\,\psi - q_1\varphi = c_{10} + c_{11}x + \cdots\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \theta_{m-1}\,\psi - q_{m-1}\varphi = c_{m-1,0} + c_{m-1,1}x + \cdots \end{cases}$$

soit

$$C = \Sigma \pm c_{00}\, c_{11} \ldots c_{m-1,\,m-1}\,,$$

$C = 0$ sera la résultante des équations (1), ou la condition

pour qu'elles aient au moins une racine commune ; nous allons le démontrer de nouveau : multiplions la première équation (1) par $\frac{\partial C}{\partial c_{00}}$, la seconde par $\frac{\partial C}{\partial c_{10}}$, etc... et ajoutons ; nous aurons

$$\psi\left(\theta_0 \frac{\partial C}{\partial c_{00}} + \theta_1 \frac{\partial C}{\partial c_{10}} \ldots\right) - \varphi\left(\theta_0 \frac{\partial C}{\partial c_{00}} + \ldots\right) = C\,.$$

Le coefficient de ψ est de degré $m - 1$, celui de φ de degré inférieur à n car q_0 est au plus de degré 0, q_1 au plus de degré 1, etc. Si donc $C = 0$, quand on aura $\varphi = 0$, il faudra que ψ ou son coefficient s'annule, or ce coefficient ne pouvant s'annuler que pour $n - 1$ valeurs de x, $\psi = 0$ aura au moins une racine commune avec $\varphi = 0$. Supposons $C = 0$.

Les équations $r_0 = 0$, $r_1 = 0$ ... $r_{m-1} = 0$ ayant leur déterminant nul, se réduisent à $n - 1$ distinctes, qui font alors connaître x, x^2, ... x^{n-1} considérés comme des inconnues distinctes, au moins en général.

Toutefois, si C était nul ainsi que tous ses mineurs, cette conclusion serait en défaut ; mais alors on multiplierait la première formule (2) par $\frac{\partial C_1}{\partial c_{00}}$ la seconde par $\frac{\partial C_1}{\partial c_{10}}$ ... la $(m-1)^{me}$ par $\frac{\partial C_1}{\partial c_{m-2,0}}$, C_1 désignant un mineur de C, et l'on aurait

$$\psi\lambda - \varphi\mu = C_1\,,$$

λ et μ désignant des polynômes de degré $m - 2$ et $n - 2$ respectivement, mais C_1 étant nul, par hypothèse,

$$\psi\lambda - \varphi\mu = 0$$

si l'on suppose $x = \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$, $\varphi(x)$ s'annule, or, λ ne s'annulant que pour $n - 2$ valeurs de x, $\psi = 0$ doit avoir deux racines communes avec $\varphi = 0$, ces deux racines seront solutions de l'équation du second degré en x, obtenu en éliminant x^3, x^4 ... x_m entre les $m - 2$ équations distinctes auxquelles se réduisent $r_0 = 0$, $r_1 = 0$, ..., $r_{m-1} = 0$ et ainsi de suite, donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi = 0$, $\psi = 0$ aient p racines communes, est que C soit nul, ainsi que ses mineurs d'ordre $p - 1$. Les racines communes sont solutions de

l'équation obtenue en éliminant x^{m-1}, x^{m-2} ... entre les équations distinctes auxquelles se réduisent $r_0 = 0$, $r_1 = 0$, ...

REMARQUE I. — C'est pour simplifier l'exposition, que nous avons supposé θ_0, θ_1 ... de degrés 0, 1, ..; il est clair qu'ils peuvent être de degré $m-1$.

REMARQUE II. — Si l'on avait employé la méthode de Cauchy, C se serait présenté sous la forme de discriminant d'une fonction du second degré F, et la condition pour que $\varphi = 0$, $\psi = 0$ aient p racines communes serait la condition pour que F soit la somme de $m-p$ carrés, ce qui montre que le nombre distinct de conditions pour que ce fait se présente est $1+2+\ldots+p = \frac{p(p+1)}{2}$.

REMARQUE III. — Il y a avantage, dans la pratique, à employer la méthode de Cauchy qui fournit le résultant sous la forme d'un déterminant symétrique

$$C = \Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{mm},$$

car l'équation $C = 0$ est admirablement préparée pour l'application du théorème de Sturm. On a, en effet, d'après un théorème connu

$$C \frac{\partial^2 C}{\partial c_{11}\, \partial c_{22}} = \frac{\partial C}{\partial c_{11}} \frac{\partial C}{\partial c_{22}} - \left(\frac{\partial C}{\partial c_{12}}\right)^2,$$

et, si l'on pose

$$\frac{\partial C}{\partial c_{11}} = C_1, \quad \frac{\partial^2 C}{\partial c_{11} \partial c_{22}} = C_2, \quad \frac{\partial^3 C}{\partial c_{11} \partial c_{22} \partial c_{33}} = C_3, \ \ldots$$

on a

$$CC_2 = C_1 \frac{\partial C}{\partial c_{22}} - \left(\frac{\partial C}{\partial c_{12}}\right)^2.$$

Cette équation montre que, si $C_1 = 0$, C et C_2 sont de signes contraires, et en général dans la suite, C, C_1, C_2 ..., C_n lorsqu'une fonction C s'annule, celle qui la précède et celle qui la suit sont de signes contraires, c'est la propriété fondamentale des suites de Sturm. A elle seule elle ne permet pas, il est vrai, la séparation à coup sûr des racines, mais elle peut rendre de grands services, surtout si l'on est sûr que deux fonctions C consécutives ne peuvent pas s'annuler en même temps.

REMARQUE IV. — On a

$$\frac{\partial C}{\partial a_p} = \Sigma \frac{\partial C}{\partial c_{ij}} \frac{\partial c_{ij}}{\partial a_p}.$$

Si tous les mineurs de C sont nuls, on aura donc $\frac{\partial C}{\partial a_p} = 0$, et de même $\frac{\partial C}{\partial b_q} = 0$, a_p et b_q désignant des coefficients quelconques de φ et de ψ; on verrait de même que si les $\frac{\partial^2 C}{\partial c_{ij} \partial c_{hk}}$ sont nuls, les $\frac{\partial^2 C}{\partial a_p \partial a_q}$ le sont aussi, etc.

Supposons maintenant que les a et les b soient fonctions entières d'une variable y ; les degrés de φ et ψ restant m et n par rapport à l'ensemble des variables x et y, en sorte que a_i et b_i qui sont de poids i soient aussi de degré i en y.

L'équation $C = 0$ est de degré mn, puisque C est de poids mn (§ 8,) elle a mn racines en y ; à chacune d'elles correspond une valeur de x qui est solution des équations $r_0 = 0$, $r_1 = 0$, ... ou de l'équation du premier degré obtenue en éliminant x^2, x^3 ..., donc en général, les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ auront mn solutions.

Dans quelques cas particuliers, à une valeur de y tirée de $C = 0$ pourront correspondre plusieurs valeurs de x, par exemple à une valeur de y pourront correspondre deux valeurs de x, mais alors les $\frac{\partial C}{\partial c_{ij}}$ seront nuls, mais on aura

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \Sigma \frac{\partial C}{\partial c_{ij}} \frac{\partial c_{ij}}{\partial y} = 0.$$

et l'équation $C = 0$ aura une racine double en y. De même, si à une valeur de y correspondaient p valeurs égales ou inégales de x, cette valeur de y serait racine d'ordre p de $C = 0$. Cette circonstance n'infirmerait donc pas nos conclusions.

Mais il pourrait arriver que $C = 0$ fut une identité et le système $\varphi = 0$, $\psi = 0$ serait indéterminé. Nous reviendrons sur ce cas que nous excluons pour le moment.

On peut, à l'aide d'une fiction, énoncer le théorème général de Bezout.

Deux équations de degrés m et n en x et y ont mn solutions à moins qu'elles n'en aient une infinité.

En effet, dans le cas où les a et les b ne sont soumis à aucune condition, l'équation $C=0$ a bien mn racines et à chacune correspond une valeur de x, si l'équation $C=0$ n'a que $mn-p$ racines égales ou inégales, on peut convenir de dire qu'elle a p racines infinies, car les racines qui disparaissent croissent indéfiniment quand les coefficients de y^{mn} ... tendent vers zéro, à ces valeurs infinies de y peuvent correspondre des valeurs finies de x que l'on obtient en changeant dans les proposées y en $\frac{1}{y}$; on pourra, si l'on veut, rendre les équations $\varphi=0$, $\psi=0$ homogènes en remplaçant x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, en chassant les dénominateurs z, z^2,... et en ne considérant que les rapports $x:y:z$; le théorème de Bezout aura ainsi toute sa généralité.

13. **Solutions multiples**. — Deux équations $\varphi=0$, $\psi=0$ en x et y ont une solution multiple d'ordre p quand la résultante $C=0$ en y a une racine d'ordre p au moins, et quand à cette racine correspondent p valeurs égales de x, ou *vice versa*.

Pour que $C=0$ ait une racine d'ordre p, il suffit que les mineurs d'ordre $p-1$ de C soient nuls; cela est nécessaire si l'on veut que x ait p valeurs pour la valeur multiple de y, mais cela ne suffit pas encore pour que la solution soit multiple, il faut encore que la résultante de $r_1=0$, $r_2=0$, ... ait une racine d'ordre de multiplicité p.

On peut aussi dire que la résultante $C=0$ en y et que la résultante $D=0$ en x ont chacune une racine d'ordre p qui sont à la fois solutions de $\varphi=0$ et $\psi=0$; or, $C=0$ et $D=0$ sont de la forme

$$\lambda\varphi-\mu\psi=0,\ \lambda'\varphi-\mu'\psi=0.$$

Exprimons d'abord qu'elles ont une racine double, on aura, en observant que $\varphi=0$, $\psi=0$

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\mu\frac{\partial\psi}{\partial y}=0,\ \lambda'\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\mu'\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

mais $\lambda\varphi-\mu\psi$ ne contenant pas x ...

$$\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,\ \frac{\lambda'\partial\varphi}{\partial y}-\mu'\frac{\partial\psi}{\partial y}=0;$$

de ces équations on tire

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Il est clair qu'en différentiant encore, et en éliminant μ, λ et leurs dérivées, on obtiendrait la condition pour que $\varphi = 0$, $\psi = 0$ aient une solution triple, quadruple...

Toutefois, la condition (A) peut être satisfaite sans que les équations proposées aient une solution multiple, c'est ce qui arriverait par exemple, si l'on avait

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Solutions singulières. — Nous devons nous arrêter sur un cas singulier sur lequel nous n'avons pas insisté. Reprenons les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ des degrés m et n en x et y, le résultant C de φ et ψ peut être identiquement nul, et nous avons dit que si les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ étaient indéterminées, y est arbitraire et alors à chaque valeur de y correspond une valeur de x ou des valeurs de x ; on peut se demander lesquelles ? Or C peut être identiquement nul sans que ses mineurs le soient, et comme dans le cas général, à chaque valeur de y correspond une seule valeur de x, si les mineurs du premier ordre de C sont tous nuls, à chaque valeur de y correspondent deux valeurs de x et ainsi de suite. S'il arrive que les éléments de C soient eux-mêmes nuls, φ et ψ ne diffèrent que par un facteur constant.

Géométriquement, dans le cas où C est identiquement nul, les courbes dont les équations sont $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ont une partie commune, l'une d'elles au moins est décomposable, ordinairement la partie commune est une droite, dans d'autres cas moins fréquents elle peut être une conique et ainsi de suite.

14. Condition pour que trois équations aient une solution commune. — Considérons trois équations :

$$(1) \qquad \varphi(x) = 0, \qquad \chi(x) = 0, \qquad \psi(x) = 0 ;$$

formons avec φ et χ, avec φ et ψ les deux systèmes

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi\chi_0 - \chi\varphi_0 = p_{00} + p_{01}x + \dots + p_{0,m-1}x^{m-1}, \\ \varphi\chi_1 - \chi\varphi_1 = p_{10} + p_{11}x + \dots + p_{1,m-1}x^{m-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi\psi_0 - \psi\varphi_0 = q_{00} + q_{01}x + \dots + q_{0,n-1}x^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$\varphi_0, \varphi_1 \dots$ désignant les coefficients de $y^{m-1}, y^{m-2} \dots$ dans le quotient de la division $\dfrac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$, $\chi_0, \chi_1 \dots$ et $\psi_0, \psi_1 \dots$ ayant des significations analogues, la solution commune aux équations (1), si elle existe, satisfera également aux équations

$$\varphi\chi_i - \chi\varphi_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi\psi_i - \psi\varphi_i = 0,$$

et si l'on pose

$$\Sigma \pm p_{00}p_{11}p_{22} \dots = \mathrm{P},$$

on aura

$$\mathrm{P} = 0, \qquad \mathrm{P}_1 = 0, \dots \qquad \mathrm{P}_m = 0,$$

$\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \dots$ désignant ce que devient P quand on y remplace une ligne quelconque par une ligne du déterminant

$$\mathrm{Q} = \Sigma \pm q_{00}q_{11}q_{22} \dots$$

Ces $m + 1$ conditions, ne sont pas toutes nécessaires ; pour que les équations (1) aient une racine commune, les deux premières sont seules nécessaires en général, si φ_0 qui est de degré 0 n'est pas nul, on déduira en effet de (2) une relation de la forme

$$\varphi\left(\chi_0 \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p_{00}} + \chi_1 \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p_{11}} \dots\right) - \chi\left(\varphi_0 \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p_{00}} + \dots\right) = 0,$$

et de (1) et de la première formule (3)

$$\varphi\left(\chi_1 \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial p_{10}} + \chi_2 \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial p_{20}} + \dots + \psi_0 \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial q_{00}}\right)$$
$$- \chi\left(\varphi_1 \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial p_{10}} + \varphi_2 \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial p_{20}} + \dots\right) - \psi\varphi_0 \frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial q_{00}} = 0.$$

Ces équations sont de la forme

$$(4) \qquad \lambda\varphi - \mu\chi = 0$$

$$(5) \qquad \lambda'\varphi - \mu'\chi - \nu\psi = 0,$$

λ, μ sont de degrés moindres que les degrés de χ et φ et ν est de degré 0, en sorte que, comme on l'a déjà observé plus haut toutes les racines de $\varphi = 0$ ne pouvant appartenir à $\mu = 0$, φ et χ ont une racine commune, en vertu de (4). Cette racine appartenant à φ et χ, doit annuler $\nu\psi$, or ν est une constante différente de zéro par hypothèse. Donc $\chi = 0$ admet la racine commune à $\varphi = 0$, $\psi = 0$.

On voit facilement comment on généraliserait et comment on exprimerait que n équations ont une racine commune.

Il ne sera pas inutile de remarquer que des équations

$$\varphi\chi_0 - \chi\varphi_0 = 0, \qquad \varphi\chi_1 - \chi\varphi_1 = 0, \ldots$$
$$\varphi\psi_0 - \psi\varphi_0 = 0, \qquad \varphi\psi_1 - \psi\varphi_1 = 0 \ldots$$

on pourra déduire en éliminant les diverses puissances de x, des équations de poids au plus égal au produit des degrés des deux fonctions φ, ψ qui ont le degré le plus élevé et ces équations seront en nombre égal à $m + 1$, m désignant le degré de φ.

CHAPITRE II

ÉLIMINATION DANS LE CAS GÉNÉRAL

15. **Equivalences.** — Si nous considérons des polynômes entiers en x, y, z... à savoir P, Q, R,... nous dirons que deux polynômes A et B sont *équivalents* par rapport aux polynômes P, Q,... ou par rapport aux modules P, Q, R,... si l'on a

$$A - B = \lambda P + \mu Q + \nu R...$$

λ, μ, ν... désignant des polynômes entiers en x, y, z... et nous exprimerons cette condition au moyen de la notation.

$$A \equiv B \pmod{P, Q...},$$

ou même

$$A \equiv B$$

quand on connaîtra les modules P, Q, R,... sans qu'il soit nécessaire de les mentionner explicitement. Quand par rapport aux mêmes modules P, Q... on aura

$$A \equiv B, \quad A' \equiv B', ...$$

il est clair que l'on aura

$$aA + a'A' + ... \equiv aB + a'B' + ...$$

Inversement de

(1) $$aA \equiv aB,$$

on pourra bien conclure

$$A \equiv B$$

si a est une quantité indépendante de x, y, z... mais seulement dans ce cas; en effet on tire de (1)

$$a\,(A - B) \equiv 0 \qquad \text{ou} \qquad a\,(A - B) = \lambda P + \mu Q + \ldots.$$

mais

$$A - B = \frac{\lambda P + \mu Q + \ldots}{a}$$

n'est pas nécessairement de la forme $\lambda' P + \mu' Q + \ldots$, λ', μ'... désignant des polynômes entiers.

Il est clair que l'on peut multiplier, mais non diviser des équivalences membre à membre.

THÉORÈME. — *Etant donnés deux modules φ, ψ fonctions de x et y on pourra toujours trouver une fonction de y seul équivalente à x.*

En effet, divisons φ, $x\varphi$, ... $x^{m-1}\varphi$ par ψ, m désignant le degré de φ; si l'on appelle r_0, r_1,... les restes en x, on aura :

$$r_0 \equiv 0, \qquad r_1 \equiv 0 \ldots \qquad r_{m-1} \equiv 0.$$

Soit C le déterminant des coefficients de x_0, x, x^2...

Il ne sera pas identiquement nul, si φ et ψ sont distincts (n'ont pas une infinité de solutions communes). L'élimination de x^2, x^3... x^{m-1} donne deux relations de la forme

$$Ax + B \equiv 0, \qquad A'x + B' \equiv 0,$$

A, B, A', B' ne contenant que y, j'ajoute que l'une d'elles sera si l'on veut

$$Cx \equiv 0,$$

et l'autre $Ax + B \equiv 0$ aura pour coefficients des mineurs de C; on peut supposer A et C sans solution commune, ce qui revient à admettre que la résultante C n'a pas de racine double (nous le supposerons), alors il existera des polynômes en y, u et v donnant

$$uC + vA = 1 \text{ et } a\ fortiori\ uC + vA \equiv 1.$$

et les formules $Cx \equiv 0$, $Ax + B \equiv 0$, multipliées par u et v et ajoutées donneront

$$x + vB \equiv 0 \qquad \text{C. q. f. d.}$$

J'ajoute que dans l'équivalence

$$x = f(y),$$

on peut supposer $f(y)$ de degré inférieur à μ produit des degrés des modules φ et ψ, car en appelant $f_1(y)$ le reste de la division de f par C on a

$$f = CQ + f_1,$$

et comme $C \equiv 0$, $f \equiv f_1$ et par suite

$$x = f_1(y),$$

il en résulte

$$x^\alpha = F(y),$$
$$y^\beta x^\alpha = F_1(y),$$
$$\Sigma A y^\beta x^\alpha = F_2(y),$$

F, F_1, F_2 désignant des polynômes entiers de degré inférieur à μ et A désignant une constante. Donc :

Tout polynôme en y et x est équivalent à un polynôme en x seul ou en y seul et de degré $\mu - 1$ au plus. Ce polynôme est bien déterminé.

En effet si l'on avait

$$\theta(x, y) = f(y) = f_1(y),$$

on en conclurait

$$f(y) - f_1(y) = 0,$$

et comme f et f_1 sont de degré inférieur à μ, $f = f_1$.

16. **Résolution de trois équations.** — Considérons trois équations.

$$(1) \qquad \varphi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

respectivement des degrés m, n, p. Prenons χ et ψ pour modules et regardons x et y comme variables et z comme paramètre. φ, $x\varphi$, $x^2\varphi$... $x^{pn-1}\varphi$, seront équivalents à des polynômes entiers en x de degré x^{pn-1}, on pourra donc poser

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = c_{00} + c_{01}x + \dots \\ x\varphi = c_{10} + c_{11}x + \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

et, en appelant C le déterminant $\Sigma \pm c_{00}\, c_{11}\, c_{22} \ldots$, on en conclura en multipliant par des mineurs de C et en ajoutant

$$P(x)\,\varphi(x, y, z) \equiv C.$$

La condition $C = 0$ exprime que les équations (1) ont une solution commune, en effet elle peut s'écrire

$$P(x)\,\varphi(x, y, z) + \lambda\chi + \mu\varphi = 0$$

et l'on voit que si χ et ψ sont nuls à la fois, ce qui n'a lieu que pour pn valeurs simultanées de x et y, $P\varphi$ sera nul, or P ne peut s'annuler que pour $pn - 1$ valeurs de x au plus, donc $\varphi = 0$ admet une solution de $\psi = 0$, $\chi = 0$.

Sans qu'il soit nécessaire d'insister sur ce point, il est facile de voir ce qui arrive quand les mineurs de C sont nuls jusqu'à un ordre p déterminé.

L'équation $C = 0$ fait connaître les valeurs de z qu'il faut adjoindre aux valeurs de x et y pour avoir les solutions communes aux équations (1). Je n'insiste pas sur la discussion toute semblable à celle qui a été faite au sujet des équations à deux inconnues.

Mais il reste un point important à établir, c'est que la résultante $C = 0$ *est de degré mnp et que par suite les équations* (1) *ont mnp solutions.*

C'est le théorème de Bezout généralisé.

Or, si l'on se reporte à la manière dont on trouve le polynôme en x équivalent à un polynôme donné, on voit que les équations conduisent toujours à des résultats homogènes en x et y par rapport aux coefficients de ces variables, pourvu que dans φ, χ, ψ, on considère les coefficients comme ayant un poids ou un degré convenable, il faudra, par exemple considérer le coefficient de $x^\alpha y^\beta$ dans φ comme étant de poids ou de degré $m - \alpha - \beta$. Il résulte de là que c_{00} est de degré m, c_{01} de degré $m - 1 \ldots c_{10}$ de degré $m + 1$, c_{11} de degré $m, \ldots$ alors C sera évidemment de degré mnp. C. q. f. d.

17. Théorème de Bezout. — Généralisons : considérons les polynômes $\varphi(x, y, z, t)$, χ, ψ de degrés m, n, p et regardons t comme un paramètre, il existe des polynômes de la forme $\Phi(x, y, t)$, $\Psi(x, y, t)$, ne contenant plus z et de la forme $\lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi$ et par suite équivalents à 0, mod (φ, χ, ψ). Par

suite x et une fonction quelconque de x et de y sera équivalente à une fonction de x ou de y seuls, mod Φ, Ψ ; on pourra poser

$$f(x, y) = X + \Lambda\Phi + M\Psi = X + \lambda\varphi + \mu\chi + \nu\psi,$$

X ne dépendant que de x, en particulier

$$y^\beta \equiv X \pmod{\varphi, \chi, \psi},$$

et

$$z^\gamma \equiv X_1,$$

X et X_1 désignant des fonctions d'x seul, on en conclura

$$Ax^\alpha y^\beta z^\gamma \equiv X_2,$$

X_2 dépendant de x seul ; donc un polynôme est équivalent à un autre qui ne contient que x, polynôme que l'on peut abaisser au degré $mnp - 1$ en le remplaçant par le reste de sa division par le résultant C de φ, χ, ψ ; si l'on forme alors, en appelant $\theta(x, y, z, t)$ un polynôme de degré q les quantités θ, $x\theta$, $x^2\theta$,... $x^{mnp-1}\theta$ et si l'on appelle

$$\begin{array}{l} c_{00} + c_{01}x + \ldots \\ c_{10} + c_{11}x + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

les polynômes en x équivalents de degré $mnp - 1$, le déterminant $C = \Sigma \pm c_{00}\, c_{11}\, c_{22}\ldots$ égalé à zéro, fournira la condition pour que $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$ aient une solution commune. On verra que C est de degré $mnpq$ en t, et que les équations en question ont au plus $mnpq$ solutions et ainsi de suite.

Encore un mot pour achever cette démonstration du théorème de Bezout. Nous avons raisonné sur des équations générales en évitant les discussions des cas particuliers où il peut y avoir indétermination. En outre il reste à prouver que le résultant de μ équations des degrés m_1, m_2... m_μ peut effectivement *atteindre* le degré m_1, m_2... m_n. Voici un exemple dans lequel cela a lieu : supposons φ, χ, ψ, θ décomposables en facteurs linéaires, pour trouver la résultante de $\varphi = 0$, $\chi = 0$, $\psi = 0$, $\theta = 0$, il suffira d'exprimer qu'un quelconque des systèmes d'équations linéaires obtenus en égalant un facteur pris dans φ, χ, ψ, θ à zéro a son déterminant Δ nul, le produit $\Pi\Delta = 0$ sera la résultante, or le nombre des facteurs Δ est précisément

$m\,n\,p\,q$ et, comme chacun d'eux est du premier degré, la résultante est de degré $mnpq$.

Remarque importante. — Nous avons admis tacitement que la résultante des équations sur lesquelles nous raisonnions n'était pas identiquement nulle, elle pourrait l'être ; il se présenterait alors le phénomène que nous avons déjà observé dans le cas relatif à deux équations : il y aurait une infinité de solutions et, parmi ces solutions, il en existerait formant une suite continue de valeurs simultanées des inconnues, auxquelles il faudrait adjoindre d'autres solutions singulières en nombre fini. Mais c'est l'étude géométrique des surfaces qui met surtout en relief, le caractère de ces solutions singulières.

Autre remarque importante. — La résultante de plusieurs équations

$$(1) \qquad f_0 = 0, \quad f_1 = 0 \dots f_n = 0$$

où f_0, $f_1 \dots f_n$ sont des fonctions entières de x_1, $x_2 \dots x_n$ se présente, comme on l'a vu sous la forme

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots \lambda_n f_n = 0,$$

λ_0, $\lambda_1 \dots \lambda_n$ désignant des polynômes entiers en x_1, $x_2 \dots$, x_n ; si f_0, $f_1 \dots$ contiennent une variable x_0 en plus, le premier membre de cette équation sera, en général, fonction de x_0, sinon les équations (1) n'ont pas de solution en général et en ont une infinité s'il se réduit identiquement à zéro.

On sait que dans ces cas le déterminant

$$\frac{\partial (f_0, f_1 \dots f_n)}{\partial (x_0, x_1 \dots x_n)}$$

doit être identiquement nul, c'est ce qu'il est facile de vérifier En effet, si l'on a identiquement

$$\lambda_0 f_0 + \dots + \lambda_n f_n = h,$$

h désignant une constante nulle ou différente de zéro, on a :

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial x_i} + f_0 \frac{\partial \lambda_0}{\partial x_i} + \dots = 0 ;$$

et si $f_0, f_1 \dots$ sont nuls

$$\lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \dots + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial x_i} = 0 ;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial(f_0, f_1 \dots f_n)}{\partial(x_0, x_1 \dots x_n)} = 0.$$

C. f. q. d.

18. **Méthode de Bezout.** — Soient $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ des polynômes entiers en $x_1, x_2 \dots, x_n$, respectivement des degrés $m_0, m_1, \dots m_n$. Soit,

$$m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq m_n.$$

Appelons *polynôme réduit* un polynôme qui ne contient pas de terme divisible par $x_1^{m_1}, x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$. Le nombre des arguments $x_1^{\alpha} x_2^{\beta} \dots x_n^{\lambda}$ réduits sera $m_1 m_2 \dots m_n = \mu$.

On peut évidemment poser, si le coefficient de $x_n^{m_n}$ dans φ_n n'est pas nul

(1) $$x_n^{m_n} = a\varphi_n + \omega,$$

a étant une constante et ω un polynôme réduit, donc

$$x_n^{m_n + 1} = a x_n \varphi_n + \omega x_n ;$$

ωx_n contient un seul terme divisible par $x_n^{m_n}$ et ce terme est le produit de $x_n^{m_n}$ par une constante ; en faisant usage de (1) on aura donc

$$x_n^{m_n + 1} = a' \varphi_n + \omega',$$

a' étant du premier degré et ω' étant un polynôme réduit ; en continuant ainsi, on voit que

(2) $$x_n^{\alpha} = \mathrm{A}\varphi_n + \Omega$$

quel que soit α. A est un polynôme entier en x_n et Ω est réduit. Portons dans $\varphi_0, \varphi_1 \dots \varphi_{n-1}$ les valeurs des puissances de x_n supérieures à m_{n-1}, en faisant usage des formules (2).

Ces polynômes prendront la forme

$$\varphi_i = \mathrm{G}_i \varphi_n + \mathrm{H}_i.$$

H_i désignant un polynôme qui ne contient plus de termes divisibles par $x_n^{m_n}$; considérons alors les polynômes H_0, $H_1 \dots H_{n-1}$ en opérant avec H_{n-1}. Comme avec φ_n on mettra x_{n-1}^{β} sous la forme

$$x_{n-1}^{\beta} = BH_{n-1} + \Omega',$$

Ω' désignant un polynôme réduit, et en éliminant à l'aide de cette formule les puissance de x_{n-1} supérieures à $m_{n-1} - 1$ on mettra les H_i sous la forme

$$H_i = K_i H_{n-1} + L_i,$$

L_i ne contenant plus de termes divisibles par $x_n^{m_n}$, $x_{n-1}^{m_{n-1}}$, et par suite

$$\varphi_i = G_i \varphi_n + K_i H_{n-1} + L_i,$$

et comme

$$H_{n-1} = G_{n-1}\varphi_n - \varphi_{n-1},$$

φ_i sera de la forme

$$\varphi_i = M_i \varphi_n + N_i \varphi_{n-1} + L_i ;$$

et ainsi de suite, on peut donc poser

$$\varphi_0 = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \dots + \lambda_n \varphi_n + P,$$

P désignant un polynôme réduit. L'opération très compliquée et malheureusement soumise à des restrictions est l'analogue de la division, φ_0 est une sorte de dividende, φ_1, $\varphi_2 \dots$ sont des diviseurs et P est un reste. Si l'on appelle ω_1, $\omega_2 \dots \omega_\mu$ tous les arguments réduits on aura

$$(3) \qquad \omega_i \varphi_0 = \lambda_{i1}\varphi_1 + \lambda_{i2}\varphi_2 \dots + \lambda_{in}\varphi_n + P_i,$$

les λ désignant des polynômes entiers et P_i un polynôme réduit, contenant μ termes tels que $c\omega_\mu$, c désignant une constante. Si l'on désigne par C le déterminant des coefficients des P et par C_1, $C_2 \dots C_\mu$ ses mineurs relatifs à l'argument 1, on aura, en multipliant l'équation (3) par C_i et en ajoutant les résultats obtenus en faisant $i = 1, 2, \dots \mu$:

$$\varphi_0 \Sigma C_i \omega_i - (\varphi_1 \Sigma C_i \lambda_{i1} \dots + \varphi_n \Sigma C_i \lambda_{in} + C) = 0,$$

ou plus simplement

$$\text{(A)} \qquad R_0\varphi_0 + R_1\varphi_1 + \ldots + R_n\varphi_n = C$$

$R_0, R_1\ldots$ désignant des polynômes dont le premier est réduit ; en faisant $x_1, x_2\ldots, x_n$ égaux aux éléments $\beta_{1i}, \beta_{2i}\ldots \beta_{ni}$ d'une solution de $\varphi_1 = 0, \ldots \varphi_n = 0$, l'équation (3), en admettant que ces équations aient précisément μ solutions, en fournit μ^2, qui montrent que

$$\Pi\varphi(\beta_{1i}, \beta_{2i}\ldots)\,\Sigma \pm \omega_{11}\ldots \omega_{\mu\mu} = C\Sigma \pm \omega_{11}\ldots \omega_{\mu\mu},$$

ω_{ii} désignant la valeur de ω pour $x_1 = \beta_{1i}$, $x_2 = \beta_{2i}\ldots$ et par suite

$$\Pi\varphi(\beta_{1i}, \beta_{2i}\ldots) = C ;$$

$C = 0$ est donc la résultante de

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots \varphi_n = 0.$$

L'équation (A) permet le calcul des multiplicateurs, $R_0, \ldots R_n$.

La méthode de Bezout permet de vérifier que la résultante est de degré $m_0\, m_1 \ldots m_n$ au plus par rapport à une variable x_0 qui entrerait dans $\varphi_0, \varphi_1\ldots$ et qui prise en considération ne modifierait pas leurs degrés. En effet les éléments du déterminant C à μ lignes et μ colonnes sont du degré m_0.

De plus la solution commune est fournie par les équations (3) qui pour $C = 0$ et pour $\varphi_0 = \varphi_1 = \ldots = 0$ se réduisent à $\mu - 1$ distinctes et du premier degré en $\omega_2, \omega_3\ldots \omega_\mu$, l'argument ω_1 est égal à un, et comme $C = 0$ est de degré $m_0\, m_1 \ldots m_n$, les équations $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0\ldots$ auront $m_0\, m_1 \ldots m_n$ solutions, chacune correspondant à une racine de $C = 0$.

On a vu que deux équations de degrés m_0 et m_1 admettaient $m_0\, m_1$ solutions, donc d'après la théorie précédente, trois équations de degrés m_0, m_1, m_2 admettront $m_0\, m_1\, m_2$ solutions et ainsi de suite, ce que nous avons déjà démontré autrement.

19. **Théorème de Jacobi.** — Soient $f_1, f_2\ldots f_n$ des polynômes entiers en $x_1, x_2\ldots x_n$ des degrés $m_0, m_1\ldots m_n$ respectivement, soient $m_1\, m_2 \ldots m_n = \mu$ et

$$\begin{array}{ccc} \alpha_{11}, & \alpha_{21}\ldots & \alpha_{n1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1\mu}, & \alpha_{2\mu}\ldots & \alpha_{n\mu}. \end{array}$$

les μ solutions de

(1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \ldots \quad f_n = 0,$$

que nous supposerons distinctes et bien déterminées. Soient $X_1 = 0$, $X_2 = 0 \ldots X_n = 0$ les résultantes en $x_1, x_2 \ldots x_n$ de ces équations; il existera des polynômes λ_{ij} tels que

(2) $$\left\{\begin{array}{l} X_1 = \lambda_{11} f_1 + \lambda_{12} f_2 \ldots + \lambda_{1n} f_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_n = \lambda_{n1} f_1 + \lambda_{n2} f_2 \ldots + \lambda_{nn} f_n, \end{array}\right.$$

λ_{ij} en général étant de degré $\mu - m_i$.

En différentiant ces équations, on a

(3) $$\left\{\begin{array}{l} X_i' = \lambda_{i1} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{ij}} + \ldots + \lambda_{in} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_i} + f_1 \dfrac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_i} + \ldots + f_n \dfrac{\partial \lambda_{in}}{\partial x_i}. \\ 0 = \lambda_{i1} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j} + \ldots + \lambda_{in} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_j} + f_1 \dfrac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_j} + \ldots + f_n \dfrac{\partial \lambda_{in}}{\partial x_j}. \end{array}\right.$$

Posons

$$\begin{array}{l} D(x_1, x_2 \ldots x_n) = \dfrac{\partial (f_1, f_2 \ldots f_n)}{\partial (x_1, x_2 \ldots x_n)}, \\ D_i = D(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni}), \\ \Lambda = \Sigma \pm \lambda_{11} \lambda_{22} \ldots \lambda_{nn}, \\ \Lambda_i = \Lambda(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni}), \\ X_i'(\alpha_{ij}) = X_{ij}', \end{array}$$

F et G désigneront deux polynômes entiers: nous poserons encore

$$\begin{array}{l} F(\alpha_{1i}, \alpha_{i} \ldots \alpha_{ni}) = F_i, \\ G(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots \alpha_{ni}) = G_i. \end{array}$$

Nous observerons maintenant que le déterminant Λ, en vertu de (2), est nul pour toutes les valeurs de x qui annulent les X, sans annuler les f; (3) montre que

(4) $$X_{1i}' X_{2i}' \ldots X_{ni}' = \Lambda_i D_i.$$

Divisons F par X_1, soit Q_1 le quotient, divisons le reste par X_2, soit Q_2 le quotient, etc.; en décomposant $\dfrac{F}{X_1 X_2 \ldots X_n}$ en

éléments simples, on a

$$\frac{F}{X_1 X_2 \ldots X_n} = \frac{Q_1 X_1 + \ldots + Q_n X_n}{X_1 X_2 \ldots X_n} + \sum \frac{F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)}{(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2)\ldots X'_1 X'_2 \ldots}.$$

Dans cette formule faisons $F = GA$, si l'on observe que A est nul pour toutes les valeurs de x qui annulent les X sans annuler les f, on aura seulement

$$\frac{GA}{X_1 X_2 \ldots X_n} = \frac{\Sigma QX}{X_1 X_2 \ldots X_n} + \sum \frac{A_i G_i}{(x_1 - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2i}) \ldots X'_{1i} X'_{2i} \ldots}.$$

Les deux membres de cette formule pour des valeurs suffisamment grandes de $x_1, x_2 \ldots$ sont développables suivant les puissances de $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \ldots$ et leurs produits, le premier terme du second membre ne donne pas de terme en $\frac{1}{x_1 x_2 \ldots x_n}$; en égalant alors les coefficients de ce terme dans les deux membres, on aura des formules intéressantes telles que

$$\text{coeff. de } \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \text{ dans } \frac{GA}{X_1 X_2 \ldots X_n} = \sum \frac{A_i G_i}{X'_{1i} X'_{2i} \ldots X'_{ni}},$$

ou, en vertu de (4),

(5) $$\text{coeff. de } \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \text{ dans } \frac{GA}{X_1 X_2 \ldots X_n} = \sum \frac{G_i}{D_i}.$$

C'est la formule de Jacobi.

A est de degré $\Sigma(\mu - m) = n\mu - \Sigma m$; si donc G est de degré inférieur à $\Sigma m - n$ degré de D, le premier membre sera nul et on aura

(6) $$\sum \frac{G_i}{D_i} = 0.$$

20. **Les fonctions symétriques.** — On appelle fonctions symétriques des solutions des équations (1) (nous conservons les notations du paragraphe précédent) une fonction des α qui ne change pas quand on change $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots \alpha_{ni}$ en $\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots \alpha_{nj}$ respectivement.

Les formules (5) et (6) font donc connaître des fonctions symétriques en fonction des coefficients des f. Voici d'autres exemples :

Désignons par $\omega_1 = 1,\ \omega_2,\ \omega_3 \dots,\ \omega_\mu = x_1^{m_1 - 1}\, x_2^{m_2 - 1} \dots x_n^{m_n - 1}$ les μ termes de la forme $x_1^\alpha\, x_1^\beta \dots x_n^\lambda$ où $\alpha, \beta, \dots \lambda$ sont respectivement moindres que $m_1,\ m_2 \dots m_n$ et considérons le déterminant

$$\Omega = \Sigma \pm \omega_{11} \omega_{22} \dots \omega_{\mu\mu}.$$

où ω_{ij} désigne la valeur de ω pour $x_1 = \alpha_{ij} \dots,\ x_n = \alpha_{nj}$; il est de degré $\frac{\mu}{2}\ (\Sigma\, m - n)$ et Ω^2 est de degré $(\Sigma\, m - n)\ \mu$, c'est le degré de $D_1, D_2 \dots D_\mu$, on a

$$\frac{\Omega^2}{D_1 D_2 \dots D_\mu} = \begin{vmatrix} \sum \frac{\omega^2_{1i}}{D_i}, & \sum \frac{\omega_{1i}\,\omega_{2i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\omega_{1i}\,\omega_{\mu i}}{D_i} \\ \sum \frac{\omega_{1i}\,\omega_{2i}}{D_i}, & \sum \frac{\omega^2_{2i}}{D_i} & \dots & \sum \frac{\omega_{2i}\,\omega_{\mu i}}{D_i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

Or en vertu des formules (5), (6) de Jacobi, tous les éléments du second membre à gauche de la diagonale sont nuls, ceux de la diagonale sont de la forme $\Sigma \frac{G_i}{D_i}$, G désignant un polynôme de même degré que D, le coefficient de $\frac{1}{x_1\, x_2 \dots}$ dans $\frac{AG}{X_1\, X_2 \dots X_n}$ étant g on a par suite

$$\Omega^2 = D_1 D_2 \dots D_\mu \Pi\, g.$$

et les g ne dépendant que des coefficients des termes du degré le plus élevé dans les f on peut poser

$$\Omega^2 = k D_1 D_2 \dots D_\mu ,$$

k ne dépendant pas des α, en effet s'il en dépendait, ce serait une fonction rationnelle de degré zéro ne pouvant pas devenir infinie pour des valeurs finies des α ce qui est absurde.

21. **Nouvelle méthode pour former la résultante.** — Conservant les notations des paragraphes précédents et désignant par f_0 un polynôme de degré m_0, faisons le produit des déterminants Ω et

$$\begin{vmatrix} \frac{\omega_{11} f_{01}}{D_1}, & \frac{\omega_{12} f_{02}}{D_2} & \cdots & \frac{\omega_{1\mu} f_{0\mu}}{D_\mu} \\ \frac{\omega_{21} f_{01}}{D_1}, & \frac{\omega_{22} f_{02}}{D_2} & \cdots & \frac{\omega_{2\mu} f_{0\mu}}{D_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

où $f_{0i} = f_0(\alpha_{1i}, \alpha_{2i} \ldots)$; nous aurons

$$\frac{\Omega^2}{\Pi D_i} \Pi f_{0i} = H \quad \text{ou} \quad k \Pi f_{0i} = H,$$

H désignant le déterminant dont l'élément général est

$$\Sigma \frac{\omega_{ij} f_{0j}}{D_j},$$

et par suite calculable par les formules (5) (6) de Jacobi. Or $\Pi f_{0i} = 0$ est évidemment la condition pour que

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \ldots \quad f_n = 0$$

aient une solution commune. Malheureusement cette méthode suppose que l'on ait formé les résultantes et les multiplicateurs des équations (1). Aussi est-elle plus curieuse qu'utile.

22. **Les fonctions interpolaires.** — Conservons toujours les mêmes notations, on peut poser (en vertu de la formule de Taylor)

$$(7) \qquad f_i = (x_1 - \alpha_1) f^j_{i1} + \ldots (x_n - \alpha_{nj}) f^j_{in}$$

f^j_{iK} désignant des polynômes entiers en $x_1, x_2 \ldots \alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots$, et cela d'une infinité de manières. Si l'on fait alors

$$\xi_j = \frac{1}{D_j} \begin{vmatrix} f^j_{11} & f^j_{12} \cdots & f^j_{1n} \\ f^j_{21} & f^j_{22} \cdots & f^j_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f^j_{n1} & f^j_{n2} \cdots & f^j_{nn} \end{vmatrix}.$$

en vertu de (7), ξ_j s'annulera pour les valeurs des α qui annulent les f, excepté pour $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j} \ldots$ et si l'on fait $x_1 = \alpha_{1j}$, $x_2 = \alpha_{2j} \ldots$, f^j_{ik} se réduira à $\frac{df_i}{d\alpha_{jk}}$ en sorte que l'on aura $\xi_j = 1$.

Si l'on considère la somme $\xi_1 + \xi_2 \ldots + \xi_\mu$, cette somme se compose de termes de degré $\Sigma m - n$ au plus; ceux de degré supérieur à zéro, en vertu du théorème de Jacobi, ont des coefficients nuls, donc $\Sigma \xi_i$ est indépendant des x, or pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}, \ldots$ il se réduit à l'unité d'après ce qui précède, donc

$$(8) \qquad \xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_\mu = 1.$$

Si l'on considère le déterminant

$$\frac{1}{D_j}\begin{vmatrix} f_0 - f_0(\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots), & f^j_{01} \cdots f^j_{0n} \\ f_1, & f^j_{11} \cdots f^j_{1n} \\ \cdots & \cdots \\ f_n, & f^j_{n1} \cdots f^j_{nn} \end{vmatrix},$$

il est évidemment nul, en vertu de (7) donc

$$f_0\xi_j - f_{0j}\,\xi_j = \lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_n f_n,$$

λ_1, $\lambda_2 \ldots$ désignant des polynômes entiers en x_1, $x_2 \ldots$ si l'on fait $j = 1, 2, \ldots \mu$ et si l'on ajoute les formules obtenues, *on a en vertu de* (8)

$$f_0 = f_{01}\xi_1 + f_{02}\xi_2 \cdots + f_{0\mu}\,\xi_\mu + \mu f_1 + \cdots,$$

ou

$$f_0 \equiv f_{01}\xi_1 + \cdots f_{0\mu}\,\xi_\mu \quad (\mathrm{mod}\, f_1, f_2 \cdots, f_n):$$

et si f_0 est de degré inférieur à $m_1\, m_2 \ldots m_n$, en vertu du théorème de Jacobi les λ seront nuls, *et l'on aura*

$$f_0 = f_{01}\xi_1 + \cdots f_{0\mu}\,\xi_\mu.$$

Les ξ sont linéairement indépendants; si l'on avait en effet

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 \ldots + a_n\xi_n = 0$$

on en conclurait pour $x_1 = \alpha_{1j}$ $x_2 = \alpha_{2j}$ ...

$$a_j\xi_j = 0;$$

tous les a sont donc nuls.

Il en résulte que si l'on a identiquement

$$\Sigma a_i \xi_i = \Sigma b_i \xi_i\,,$$

a_i sera égal à b_i.

On a

$$\xi_i^2 = \xi_i, \qquad \xi_i \xi_j = 0, \qquad (\text{mod } f_1, f_2 \ldots f_n),$$

car en mettant ξ_i ξ_j sous la forme

$$a_1 \xi_1 + \ldots a_\mu \xi_\mu + \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \ldots,$$

et en annulant les f_1 en observant que $\xi_i \xi_j$ est toujours nul pour i différent du j, et égal à un pour $i = j$ quand les x sont égaux à α_{1i}, α_{2i} ..., on voit que dans le premier cas les a sont nuls et dans le second ils le sont encore excepté a_i qui est égal à 1.

En général, on voit que *toute fonction nulle en même temps que les f est de la forme*

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots \lambda_n f_n,$$

λ_1, λ_2 ... désignant des polynômes entiers, elle est équivalente à 0.

La résultante des équations

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 0 \ldots \qquad f_n = 0,$$

peut se mettre sous la forme

$$f_{01} \quad f_{02} \cdots \quad f_{0\mu} = 0\,;$$

or,

$$f_{01} f_{02} \cdots f_{0\mu} - f_{01} f_{02} \cdots f_{0\mu} f_0 \left(\frac{\xi_1}{f_{01}} + \frac{\xi_2}{f_{02}} \ldots + \frac{\xi_\mu}{f_{0\mu}} \right)$$

s'annule en même temps que les f, on a donc

$$\Pi f_{0i} - f_0 \Pi f_{0i} \left(\frac{\xi_1}{f_{01}} + \ldots \right) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots.$$

λ_1, λ_2 ... désignant des polynômes entiers en x, donc

$$\Pi f_{0i} = \lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_n f_n\,,$$

ce que l'on savait déjà.

Tout ce qui vient d'être dit jusqu'ici suppose que les $f = 0$ ont leurs μ solutions bien déterminées et que les D_i sont différents de zéro.

On peut remplacer les fonctions ξ_i par d'autres Ω_i qui leur sont équivalentes (mod f_1, $f_2 \ldots f_n$) et définies par la formule obtenue en remplaçant dans le déterminant que nous avons appelé Ω, les ω_{ij} par les ω_i et en divisant le résultat par Ω. Les fonctions Ω_i jouissent des propriétés suivantes que nous nous contenterons d'énoncer.

Elles sont linéairement distinctes.

On a

$$\Omega_1 + \Omega_2 + \ldots \Omega_n = 1,$$

et en général

$$f_0 = f_{01}\Omega_1 + f_{02}\Omega_2 \cdots + f_{0\mu}\Omega_\mu, \text{ (mod } f_1, f_2 \ldots).$$

Cette formule se déduit de

$$\begin{vmatrix} f_0, & \omega_1, & \omega_2 \cdots & \omega_\mu \\ f_{01}, & \omega_{11}, & \omega_{12} \cdots & \omega_{1\mu} \\ f_{02}, & \omega_{21}, & \omega_{22} \cdots & \omega_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

le déterminant s'annule avec les f et l'équivalence se change en identité quand f_0 ne contient pas de termes divisibles par $x_1^{m_1}$, $x_2^{m_2} \ldots$

$$\Omega_i^2 = \Omega_i, \quad \Omega_i \Omega_j = 0.$$

23. **Résultante. — Son expression explicite.** — Conservons toujours les mêmes notations et désignons en outre par $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$; $n + 1$ fonctions de $x_1, x_2 \ldots x_n$ des degrés $m_0, m_1 \ldots m_n$ respectivement, m_0 n'étant supérieur à aucun des nombres m_1, $m_2 \ldots m_n$, désignons par φ^j_{ik} des polynômes définis comme les f^j_{ik}, au moyen des relations

(9) $$\varphi_i - \varphi_{ij} = (x_1 - \alpha_{1j})\varphi_{j1i} + \ldots (x_n - \alpha_{nj})\varphi_{jin}$$

φ_{ij} désignant pour abréger $\varphi_i(\alpha_{1j}, \alpha_{2j} \ldots \alpha_{nj})$, puis formons les déterminants

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_0, & \varphi_1 \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_{01}, & \varphi'_{11} \cdots & \varphi'_{n1} \\ \varphi'_{02}, & \varphi'_{12} \cdots & \varphi'_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

θ_j ne change pas quand on remplace la première ligne par φ_{0j}, φ_{1j} ... donc il est de degré $\sum_1^n m_i - n$ par rapport aux x seulement, ou par rapport aux α_{ij} seulement ; de plus il est facile de voir, en vertu de (5) et (6) que

$$\frac{\theta_1}{D_1} + \frac{\theta_2}{D_2} + \ldots + \frac{\theta_\mu}{D_\mu} = \varepsilon_0\varphi_0 + \varepsilon_1\varphi_1 + \ldots \varepsilon_n\varphi_n.$$

ε_0, ε_1 ... désignant des constantes, en sorte que si θ_{ji} est la valeur que prend θ_j pour $x_1 = \alpha_{1i}$, $x_2 = \alpha_{2i}$ ... on aura

(8) $$\frac{\theta_{1i}}{D_1} + \frac{\theta_{2i}}{D_2} \ldots + \frac{\theta_{\mu i}}{D_\mu} = \varepsilon_0\varphi_{0i} + \varepsilon_1\varphi_{1i} + \ldots$$

posons $\Theta = \Sigma \pm \theta_{11}\, \theta_{22} \ldots \theta_{\mu\mu}$

Considérons alors le déterminant

$$\frac{\Theta}{D_1 D_2 \ldots D_\mu} = \begin{vmatrix} \frac{\theta_{11}}{D_1} & \frac{\theta_{12}}{D_2} & \ldots & \frac{\theta_{1\mu}}{D_\mu} \\ \frac{\theta_{21}}{D_1} & \frac{\theta_{22}}{D_2} & \ldots & \frac{\theta_{2\mu}}{D_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

multiplions-le successivement par le déterminant que nous avons appelé Ω au paragraphe 20 et par

$$\frac{\Omega}{D_1 D_2 \ldots D_\mu} = \begin{vmatrix} \frac{\omega_{11}}{D_1} & \frac{\omega_{12}}{D_2} & \ldots & \frac{\omega_{1\mu}}{D_\mu} \\ \frac{\omega_{21}}{D_1} & \frac{\omega_{22}}{D_2} & \ldots & \frac{\omega_{2\mu}}{D_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

En appliquant chaque fois le théorème de Jacobi, et en observant que nous l'avons ainsi multiplié par $\frac{\Omega^2}{\Pi D_i}$ qui est indépendant des α_{ij}, on voit que $\frac{\Theta}{\Pi D_i}$ est indépendant des α_{ij} ; or, il s'annule quand φ_{01}, φ_{11}, ... φ_{n1} sont nuls à la fois, et d'ailleurs α_{11}, α_{21}, ... α_{n1} sont arbitraires, donc $\frac{\Theta}{\Pi D_i} = 0$ est à un facteur près la résultante de

(9) $$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots \quad \varphi_n = 0.$$

Or si l'on suppose que les équations (9) contiennent une inconnue x_0 et qu'elles conservent leurs degrés par rapport à cette inconnue il est facile de vérifier que Θ est bien du degré μ en x_0. C'est la résultante.

24. **Étude des propriétés de la résultante.** — La résultante, dans la dernière méthode que nous avons donnée, se présente sous la forme $\Theta = 0$ et Θ est une fonction entière des coefficients de $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$ et ces coefficients y entrent sous forme de déterminants comme dans les fonctions φ_{ik}^j. En particulier si $A_{i1}, A_{i2} \ldots A_{in}$ désignent les coefficients de $x_1^{m_i}, x_2^{m_i} \ldots$ dans φ_i, Θ renfermera le déterminant $\Sigma \pm A_{11}' \ldots A_{nn}$. Le déterminant Θ n'est évidemment déterminé qu'à un facteur numérique près, mais si l'on désigne par Θ_0 ce que devient Θ quand on suppose $\varphi_0 = 1$, $\dfrac{\Theta}{\Theta_0}$ sera parfaitement déterminé et c'est ce rapport que nous appellerons le résultant de $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_n$; nous le désignerons par R.

Nous désignerons par ω_i un argument quelconque $x_1^\alpha x_2^\beta x_3^\gamma \ldots$ et par a_{ji} son coefficient dans φ_j.

Pour calculer les solutions communes aux équations

$$(9) \qquad \varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \ldots \quad \varphi_n = 0,$$

il suffit de connaître R.

En effet, faisons varier deux coefficients a_{ij} et a_{ik} de φ_i ; les solutions $x_1, x_2 \ldots$ de (9) vont varier, mais si l'on veut que R ne change pas, il faudra poser

$$(10) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_{ij}} da_{ij} + \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} da_{ik} = 0,$$

et si l'on veut que les solutions ne changent pas non plus, il faudra supposer les ω constants ; en différentiant alors $\varphi_i = 0$, on aura

$$\omega_j da_{ij} + \omega_k da_{ik} = 0.$$

De ces équations on tire

$$(11) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_{ij}} : \omega_j = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} : \omega_k,$$

de là un moyen de calculer les ω puisque l'un d'eux est égal à un.

Il pourra arriver que toutes les dérivées $\frac{\partial R}{\partial a_{ij}}$ soient nulles, alors au lieu de (10) on a

$$\frac{\partial^2 R}{\partial a_{ij}^2}\, da_{ij}^2 + 2\, \frac{\partial^2 R}{\partial a_{ij}\,\partial a_{lk}}\, da_{ij}\, da_{lk} + \frac{\partial^2 R}{\partial a_{lk}^2} = 0\,;$$

en éliminant les différentielles entre cette formule et (11) on a une équation du second degré pour déterminer un argument quelconque, les équations (9) ont deux solutions correspondant à une même racine de $R = 0$. Il est inutile d'insister sur le cas où toutes les dérivées secondes de R sont nulles.

La formule (11) donne évidemment

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ij}} : \frac{\partial R}{\partial a_{lj}} = \frac{\partial R}{\partial a_{ik}} : \frac{\partial R}{\partial a_{lk}}\,,$$

ou

$$\frac{\partial R}{\partial a_{ij}}\, \frac{\partial R}{\partial a_{lk}} - \frac{\partial R}{\partial a_{ik}}\, \frac{\partial R}{\partial a_{lj}} = 0.$$

On pourrait déduire de (11) d'autres formules du même genre en éliminant les arguments.

On obtient des équations linéaires aux dérivées partielles en remplaçant dans $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0, \ldots$ les arguments par les dérivées de R qui leur sont proportionnelles, nous ne les écrirons pas.

Lorsque l'on se propose de faire une élimination on peut être parfois tenté de faire un changement de variable, il faut alors agir avec certaines précautions ainsi que cela ressort des propositions suivantes.

Si dans les équations (9) *on pose*

$$(12)\quad \begin{cases} x_0 = \psi_0\,(y_0, y_1 \ldots y_n)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \psi_n\,(y_0, y_1 \ldots y_n)\,, \end{cases}$$

elles deviennent

$$\Phi_0\,(y_0, y_1 \ldots y_n) = 0\,,\ \Phi_1 = 0 \ldots \Phi_n = 0.$$

et la résultante $R' = 0$ *de ces équations est de la forme*

$$R_l = R^h\, S^k = 0\,.$$

$S = 0$ *désignant la résultante de* (12) *provenant de l'élimination de* $y_1, y_2 \dots y_n$.

En effet, si les équations (9) ou

$$\varphi_0(\psi_0, \psi_1 \dots) = 0, \quad \varphi_1(\psi_0, \psi_1 \dots) = 0, \quad \dots$$

ont une solution commune on a $R = 0$, équation satisfaite pour certaines valeurs de ψ_0, à ces valeurs correspondront des valeurs des y ou de y_0 données par la condition $S = 0$, mais $R' = 0$ est satisfaite pour ces valeurs de y_0 qui rendent S et R nuls, donc R' doit contenir R et S en facteur, elle est donc de la forme annoncée.

Corollaire I. — Si l'on multiplie l'une des équations (9) $\varphi_0 = 0$ par $\psi(x_1, x_2 \dots)$, la résultante des nouvelles équations sera $\Pi\, \varphi_0(\beta_1, \beta_{2i}, \dots)\, \psi(\beta_{1i}, \dots) = 0$, elle sera donc le produit des résultantes de

$$\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 0, \dots \varphi_n = 0 \text{ et de } \psi = 0, \varphi_1 = 0, \dots \varphi_n = 0.$$

Si $a_{00}, a_{01} \dots a_{ij} \dots$ *désignent des constantes, la résultante de*

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{00}\varphi_0 + a_{01}\varphi_1 \dots + a_{0n}\varphi_n = 0, \\ a_{10}\varphi_0 + a_{11}\varphi_1 \dots + a_{1n}\varphi_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

sera $R A^{\mu} = 0$, A *désignant le déterminant* $\Sigma \pm a_{00} a_{11} \dots a_{nn}$.

En effet, chaque élément du déterminant Θ se trouve ainsi multiplié par A.

25. **Méthode d'élimination de Labatie et analogues.** — Si l'on veut éliminer x entre deux équations $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$, il suffit évidemment d'égaler à zéro le dernier reste dans l'application de la méthode du plus grand commun diviseur aux polynômes φ et ψ, à la condition que les équations $\varphi = 0$, $\psi = 0$ ne contiennent pas de paramètre variable, ou que si elles en contiennent on aura soin de procéder rigoureusement, c'est-à-dire sans introduire de facteurs pour éviter des dénominateurs.

Cependant on peut introduire les facteurs en question, à la condition de modifier convenablement le résultat obtenu ; c'est ce qu'a fait pour la première fois Labatie, sans se douter peut-

être à cette époque, que sa méthode rentrait dans une autre beaucoup plus générale. Quoi qu'il en soit, lorsqu'elle a paru, la méthode de Labatie avait une valeur incontestable, elle a constitué un véritable progrès dans la théorie.

Soient ψ_0 et ψ_1, deux polynômes entiers, θ_0, $\theta_1 \ldots$ des facteurs fonctions des coefficients de ψ_0 et de ψ_1 ; soit q_1 le quotient de $\theta_0 \psi_0$ par ψ_1 et ψ_2 le reste. Soit q_2 le quotient de $\theta_1 \psi_1$ par ψ_2 et ψ_3 le reste, etc. ... Soit enfin ψ_n un dernier reste indépendant de x. Désignons par R un symbole que l'on énoncera *résultant de*. On aura

$$\begin{aligned}
\theta_0 \psi_0 &= q_1 \psi_1 + \psi_2 , \\
\theta_1 \psi_1 &= q_2 \psi_2 + \psi_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\theta_{n-3} \psi_{n-3} &= q_{n-2} \psi_{n-2} + \psi_{n-1} , \\
\theta_{n-2} \psi_{n-2} &= q_{n-1} \psi_{n-1} + \psi_n .
\end{aligned}$$

on aura ensuite

$$R(\psi_n , \psi_{n-1}) = \psi_n \theta^{\alpha} = R(\theta_{n-2} \psi_{n-2} - q_{n-1} \psi_{n-1} , \psi_{n-1})$$

car ψ_n est le résultant de ψ_{n-1} et de ψ_n à un facteur près, qui est une puissance du premier coefficient de ψ_{n-1}.

On a ensuite, en désignant par g des facteurs convenables;

$$\begin{aligned}
R(\psi_{n-1} , \psi_{n-2}) &= R(\theta_{n-3} \psi_{n-1} - q_{n-2} \psi_{n-2} , \psi_{n-2}) \\
&= \theta_{n-3}^{\alpha} \; q_{n-2}^{\beta} \; R(\psi_{n-2} , \psi_{n-3}) , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
R(\psi_1 , \psi_2) &= \theta_0^{\alpha_0} g_1^{\beta_1} R(\psi_0 , \psi_1) ,
\end{aligned}$$

en désignant par α_i et β_i des exposants convenablement choisis. On déduit de là que $R(\psi_0, \psi_1)$ est égal à ψ_n divisé par un facteur produit d'expressions de la forme $\Pi \theta^{\alpha} g^{\beta}$. Si les quotients q sont du premier degré, ils sont immédiatement connus, sinon ils exigeront quelques calculs généralement faciles.

On peut rapprocher de la méthode de Labatie la suivante qui consiste à éliminer successivement la plus haute puissance de x et le terme constant ; en procédant ainsi on remplace les équations par d'autres plus simples mais en introduisant des facteurs connus, dont on peut débarrasser le résultat final ; il

suffira, pour me faire comprendre, de choisir un exemple : considérons les équations

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,\ a'x^2 + b'x + c' = 0\ ,$$

on les remplace par

$$a'a\,x^2 + a'bx + a'c = 0,\quad aa'x^2 + ab'x + ac' = 0$$
$$c'a\,x^2 + c'bx + cc' = 0,\ ca'x^2 + cb'\,x + cc' = 0,$$

puis par

$$(ab' - ba')\,x + ac' - ca' = 0\ ,$$
$$x\,[(ac' - ca')\,x + (cb' - bc')] = 0,$$

on a ainsi introduit le facteur $ac' - ca'$, mais si l'on divise la seconde équation par x, il arrive que l'on supprime le facteur introduit et on est ramené à trouver la résultante de deux équations du premier degré.

Il résulte bien de tout ce qui a été dit jusqu'ici, que pour éliminer x et y, entre trois équations

$$(1)\qquad \varphi = 0,\ \chi = 0,\ \psi = 0$$

il ne faudrait pas éliminer par exemple, x entre $\varphi = 0$ et $\chi = 0$, ce qui donnerait une résultante $A = 0$ en y, puis éliminer x entre $\psi = 0$, $\chi = 0$, ce qui donnerait une résultante $B = 0$ en y, enfin éliminer y entre $A = 0$, $B = 0$, ce qui donnerait $C = 0$. Cette équation $C = 0$ ne serait pas la résultante des équations (1). Cependant on pourrait en déduire la véritable résultante : En effet, A et B sont de la forme

$$A = \lambda\varphi + \mu\chi\ ,\ B = \nu\varphi + \rho\psi$$

λ, μ, ν, ρ désignant des polynômes que l'on sait former. Aux équations (1) on peut substituer les équations

$$\varphi = 0,\ \lambda\varphi + \mu\chi = 0\ ,\ \nu\varphi + \rho\psi = 0\ ,$$

mais la résultante n'est plus C. On a, en effet

$$R\,(\lambda\varphi,\ \mu\chi,\ \psi) = R\,(\varphi,\ \chi,\ \psi)\ R\,(\lambda,\ \chi,\ \psi)\ R\,(\varphi,\ \mu,\ \psi)\ ,$$
$$R\,(\varphi,\ \lambda\varphi + \mu\chi,\ \psi) = R\,(\varphi,\ \chi,\ \psi)\ R\,(\varphi,\ \mu,\ \psi)\ .$$

et en continuant ainsi

$$R(\varphi, \lambda\varphi + \mu\chi, \nu\varphi + \rho\psi) = R(\varphi, \chi, \psi)\, R(\varphi, \mu, \psi)\, R(\varphi, x, \rho).$$

On peut donc calculer le facteur introduit.

26. **Équations homogènes.** — Nous allons maintenant étudier quelques cas particuliers dans lesquels le travail de l'élimination se simplifie.

Supposons les équations

$$f_1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0, f_2 = 0, \ldots f_n = 0$$

homogènes en $x_1, x_2 \ldots x_n$, elles sont en réalité à $n - 1$ variables qui sont les rapports de $n - 1$ des quantités x à la n^e, la résultante, ou plutôt le résultant de $f_1, f_2 \ldots f_n$ contiendra en facteur la variable non éliminée, et rien n'empêche alors de faire abstraction de cette variable. Il est d'ailleurs loisible de rendre n équations à $n - 1$ inconnues homogènes, en introduisant une variable nouvelle ; on pourra toujours supposer finalement à cette variable la valeur un. On trouve à l'introduction de cette variable d'*homogénéité*, de nombreux avantages, l'un d'eux résulte du théorème suivant :

Le déterminant des fonctions homogènes $f_1, f_2 \ldots f_n$ de $x_1, x_2 \ldots x_n$ s'annule, ainsi que ses dérivées, en même temps que leur résultant.

Ce théorème suppose les fonctions f de même degré, mais on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi en multipliant quelques-unes par la variable d'homogénéité. Soit donc m le degré de chacune des fonctions f, on a comme l'on sait

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} m f_1 = x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + x_n \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m f_n = x_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \ldots + x_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}. \end{array} \right.$$

Si $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0$, le résultant des f est nul et réciproquement ; et il est évident que l'on a (et quand même les f ne seraient pas de même degré)

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)} = 0.$$

Désignons par D le déterminant fonctionnel de $f_1, \dots f_n$.

De (1) on tire, en posant $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$,

$$Dx_1 = m\left[\frac{\partial D}{\partial f_{11}} f_1 + \frac{\partial D}{\partial f_{21}} f_2 + \dots + \frac{\partial D}{\partial f_{n1}} f_n\right],$$

. . . .

$$Dx_n = m\left[\frac{\partial D}{\partial f_{1n}} f_1 + \dots + \frac{\partial D}{\partial f_{nn}} f_n\right];$$

différentions la première de ces équations par rapport à x_1, $x_2 \dots x_n$, on a

$$D + x_1 \frac{\partial D}{\partial x_1} = m\left[\frac{\partial D}{\partial f_{11}} f_{11} + \frac{\partial D}{\partial f_{21}} f_{21} + \dots + f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial D}{\partial f_{11}} + \dots\right],$$

$$x_1 \frac{\partial D}{\partial x_2} = m\left[\frac{\partial D}{\partial f_{11}} f_{12} + \frac{\partial D}{\partial f_{21}} f_{22} + \dots + f_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial D}{\partial f_{11}} + \dots\right].$$

. . . .

Si nous avons alors égard aux relations qui existent entre les mineurs d'un déterminant et ses éléments on aura seulement

$$D + x_1 \frac{\partial D}{\partial x_1} = m\left[f_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial D}{\partial f_{11}} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial D}{\partial f_{n1}}\right] + mD.$$

$$x_1 \frac{\partial D}{\partial x_2} = m\left[f_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial D}{\partial f_{11}} + \dots + f_n \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial D}{\partial f_{n1}}\right].$$

. . . .

en supposant $f_1 = f_2 = \dots = 0$ et, par suite, comme on l'a vu $D = 0$ il reste $\frac{\partial D}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial D}{\partial x_2} = 0$, etc. C. q. f. d.

Puisque D et ses dérivées s'annulent avec les f on a

$$D = \lambda_1 f_1 + \dots \lambda_n f_n,$$

$$\frac{\partial D}{\partial x_i} = \lambda_{i1} f_1 + \dots \lambda_{in} f_n,$$

les λ désignant des polynômes entiers.

Le théorème précédent peut servir à trouver la résultante de trois équations homogènes du second degré ; en effet dans ce

cas D est du troisième degré et ses dérivées sont du second ; or les équations

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; f_3 = 0, \; \frac{\partial D}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial D}{\partial x_2} = 0, \; \frac{\partial D}{\partial x_3} = 0,$$

au nombre de six sont du premier degré en x_1^2, x_2^2, x_3^2, $x_1 x_2$, $x_2 x_3$, $x_3 x_1$. Leur résultante est celle des équations f_1, f_2, $f_3 = 0$.

On pourrait également trouver, en appliquant la même méthode, la résultante de n équations dont trois seraient du second degré et les autres du premier degré.

27. Solutions doubles. — Si les équations

(1) $$f_1 = 0, \; f_2 = 0 \; \ldots \; f_n = 0,$$

où f_1, $f_2 \ldots f_n$ désignent des polynômes entiers en x_1, $x_2 \ldots$, x_n, ont une solution double, $x_1 + dx_1$, $x_2 + dx_2 \ldots$ devront satisfaire à ces équations en même temps que x_1, $x_2 \ldots$ et l'on aura

(2) $$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0, \end{array} \right.$$

en sorte que

$$\frac{\partial (f_1, f_2 \ldots f_n)}{\partial (x_1, x_2 \ldots x_n)} = D$$

sera nul avec les f. Rendons les équations homogènes par l'introduction d'une variable x_0, on aura, si les équations sont satisfaites

$$\begin{array}{l} x_0 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_0} + x_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + x_n \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_0 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_0} + x_1 \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} + \ldots + x_n \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} = 0 ; \end{array}$$

multiplions la première de ces équations par $\dfrac{\partial D}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}}$, la seconde

par $\dfrac{\partial D}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}}$... et ajoutons, en observant que $D = 0$, nous aurons ;

$$\frac{\partial (f_1, f_2 \dots f_n)}{\partial (x_0, x_2 \dots x_n)} = 0.$$

Il en résulte que *si les équations* (1) *ont une solution double, les déterminants des f relatifs à n des variables $x_0, x_1 \dots x_n$ seront tous nuls.*

La condition pour qu'une solution soit triple pourrait s'obtenir en appliquant les mêmes principes, mais le résultat serait bien plus compliqué. On peut cependant obtenir à cet égard quelques résultats intéressants. En effet. on a

$$\frac{d}{dx_1} df_1 dx_1 + \frac{d}{dx_2} df_1 dx_2 + \dots = 0,$$

et en combinant cette relation avec (2) on a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} dx_1 + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} dx_2 + \dots & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 + \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} dx_2 + \dots, & \dots \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & ,\dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

et d'autres équations analogues, d'où l'on déduit en ajoutant

$$dD = 0,$$

ou

$$\frac{\partial D}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial D}{\partial x_2} dx_2 + \dots = 0.$$

En sorte que les équations obtenues tout à l'heure en égalant à zéro les déterminants de $f_1, f_2 \dots f_n$, ont elles-mêmes une solution double quand les équations (1) ont une solution triple. Et l'on pourrait évidemment généraliser.

28. **Autre exemple de simplifications.** — On a souvent besoin d'éliminer $x_1, x_2.., x_n$ entre des équations de la forme

(1) $$f_1(x_1) = 0, \; f_2(x_2) = 0 \dots f_n(x_n) = 0,$$

(2) $$\varphi(x_1, x_2 \dots x_n) = 0,$$

dont les n premières ne renferment chacune qu'une seule variable, voici comment on peut procéder. Soit en général m_i le degré de f_i. On divisera φ par f_1, soit q_1 le quotient et r_1 le reste, on divisera r_1 par φ_2 ; soit q_2 le quotient, r_2 le reste, etc., soit enfin φ_1 le dernier reste, on aura

$$\varphi = f_1 q_1 + f_2 q_2 + \ldots + f_n q_n + \varphi_1,$$

φ_1 ne contiendra plus x_1 qu'au degré $m_1 - 1$, x_2 qu'au degré $m_2 - 1$, etc. Je dis que l'on pourra remplacer φ par φ_1 sans altérer la résultante.

En effet, en appelant α_1, $\alpha_2 \ldots$ des racines des équations (1), on aura

$$\Pi\, \varphi\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = \Pi\, \varphi_1\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots).$$

Désignons par $\omega_1 = 1$, $\omega_2, \ldots \omega_\mu$, les μ arguments de la forme $x_1^\alpha\; x_2^\beta\; x_3^\gamma \ldots$ où $\alpha < m_1$, $\beta < m_2$, $\gamma < m_3 \ldots$ formons les produits $\varphi_1\omega_1$, $\varphi_1\omega_2 \ldots \varphi_1\omega_\mu$ et opérons sur chacun d'eux comme nous avons opéré sur φ, c'est-à-dire, divisons en général $\varphi_1\omega_\mu$ par f_1, $f_2 \ldots$ successivement, et appelons φ_i le dernier reste ; égalons tous ces restes à zéro, nous aurons μ équations

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 0, \ldots\ \varphi_\mu = 0.$$

Si entre ces équations, linéaires en ω_1, $\omega_2 \ldots \omega_\mu$ on élimine ces quantités, on aura la résultante cherchée. En effet on a

$$\varphi_i = \varphi_1 \omega_i - q_{1i} f_1 - q_{2i} f_2 - \ldots - q_{ni} f_n,$$

les q_{ij} désignant des polynômes entiers, et on a

$$\varphi_1 \omega_i - q_{1i} f_1 - \ldots - q_{ni} f_n = \Sigma\, c_{ij}\, \omega_j,$$

les c_{ij} désignent des constantes ; si l'on pose

$$C = \Sigma \pm c_{11}\, c_{22} \ldots c_{\mu\mu}$$

et si l'on remplace dans les équations précédentes x_1, $x_2 \ldots$ par les valeurs annulant à la fois tous les f, on obtient μ équations qui montrent que

$$\Pi\, \varphi_1\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)\, \Omega = C\, \Omega,$$

ou

$$\Pi\, \varphi\, (\alpha_1\, \alpha_2 \ldots) = C,$$

Ω désignant le déterminant des μ^2 valeurs que prennent les μ quantités ω_{ij} quand on y remplace les x par les μ systèmes de valeurs des x qui annulent les f.

29. **Autre exemple.** — On rencontre fréquemment en géométrie analytique des équations de la forme.

$$(1) \qquad \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} \ldots = \frac{f_n}{g_n},$$

$$(2) \qquad X_1 g_1 + X_2 g_2 \ldots + X_n g_n = 0 .$$

dans lesquelles $f_1, f_2, \ldots f_n$ sont les demi-dérivées de la fonction $\Sigma a_{ij} x_i x_j$ et $g_1, g_2 \ldots g$ les demi-dérivées de la fonction $\Sigma b_{ij} x_i x_j$, il s'agit d'éliminer les x entre (1) et (2). On peut toujours supposer

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1 = c_{11} f_1 + c_{12} f_2 \ldots + c_{1n} f_n, \\ g_2 = c_{11} f_1 + c_{22} f_2 \ldots + c_{2n} f_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

les c_{ij} désignant des constantes, ces formules s'obtiennent en éliminant les x entre les équations de la forme

$$f_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 \ldots + a_{in} x_n.$$
$$g_j = b_{j1} x_1 + b_{j2} x_2 \ldots + b_{jn} x_n.$$

Des premières, on tire

$$x_i = A_{i1} f_1 + A_{i2} f_2 + \ldots + A_{in} f_n$$

et $A_{ij} = A_{ji}$. Si l'on porte ces valeurs dans les g_j on obtient les formules (3) dans lesquelles on voit que

$$c_{ij} = c_j$$

et des équations (1) on déduit alors

$$\frac{c_{11} f_1 + c_{12} f_2 \ldots}{c_{11} g_1 + c_{12} g_2 \ldots} = \frac{c_{21} f_1 + c_{22} f_2 \ldots}{c_{21} g_1 + c_{22} g_2 \ldots} = \ldots$$

ou bien

$$\frac{c_{11} g_1 + c_{12} g_2 \ldots}{g_1} = \frac{c_{21} g_1 + c_{22} g_2 \ldots}{g_2} = \ldots$$

ou

$$\frac{g_1(g_1, g_2 \ldots)}{g_1} = \frac{g_2(g_1, g_2 \ldots)}{g_2} = \ldots$$

l'équation (2) donnera alors, en posant

$$g_i(g_1, g_2 \ldots) = g_i^1,$$

la relation

(4) $$X_1 g_1^1 + X_2 g_2^1 \ldots + X_n g_n^1 = 0;$$

mais en posant

$$g_i(g_1^1, g_2^1 \ldots\ldots) = g^2,$$

on voit d'une façon analogue que

(5) $$X_1 g_1^2 + X_2 g_2^2 + \ldots + X_n g_n^2 = 0$$

et ainsi de suite, les équations (2), (4), (5)... sont du premier degré en x_1, x_2... et leur résultante, est la résultante cherchée.

La résultante prend une forme qui mérite d'être signalée, d'abord l'équation (2) peut se mettre sous la forme

(6) $$x_1 G_1 + x_2 G_2 \ldots + x_n G_n = 0.$$

G_i désignant ce que devient g_i quand on y change x_1, x_2 ... x_n en X_1, X_2 ... X_n

L'équation (4) peut s'écrire

$$X_1 g_1(g_1, g_2 \ldots) + X_2 g_2(g_1 \ldots) + \ldots = 0,$$

ou

$$g_1 G_1 + g_2 G_2 + \ldots + g_n G_n = 0,$$

ou encore

$$x_1 G_1(G_1, G_2 \ldots) + x_2 G_2(G_1, G_2 \ldots) + \ldots = 0,$$

ou si l'on veut

$$x_1 G_1^1 + x_2 G_2^1 \ldots = 0,$$

etc., en sorte que le résultat demandé est

$$(7)\quad \begin{vmatrix} G_1 , & G_2 & \dots & G_n \\ G_1^1 , & G_2^1 & \dots & G_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ G_1^{n-1} , & G_2^{n-1} & \dots & G_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0 .$$

G_μ^i est alors une fonction itérative, c'est une fonction donnée par la formule

$$G_p^i (X_1 , X_2 \dots) = G_p [G_1^{i-1} (X_1 \dots) , G_2^{i-1} \dots] .$$

La formule (7) donne comme cas particulier, l'ensemble des plans qui ont les mêmes pôles par rapport à deux surfaces du second ordre, l'ensemble des plans principaux d'une surface du second ordre.

(7) présente évidemment cela de remarquable, que l'on peut y faire le changement de X_1, $X_2 \dots$ en $G_1 (X_1, X_2 \dots)$, $G_2 (X_1, X_2 \dots) \dots$ sans qu'elle cesse d'établir la même relation entre les X.

30. **Étude d'une équation remarquable**. — On rencontre des cas particuliers de l'équation

$$(1)\quad \begin{vmatrix} f_{11} + sg_{11} , & f_{12} + sg_{12} & \dots\dots & f_{1n} + sg_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} + sg_{n1} , & f_{n2} + sg_{n2} & \dots & f_{nn} + sg_{nn} \end{vmatrix} = 0 ,$$

dans une foule de questions d'analyse, de géométrie, de mécanique et de physique mathématique. On a $f_{ij} = f_{ji}$, $g_{ij} = g_{ji}$, et les f_{ij}, comme les g_{ij}, sont indépendants de s. Nous supposerons

$$f = \Sigma f_{ij} x_i x_j , g = \Sigma g_{ij} x_i x_j ,$$
$$f_i = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} , g_i = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x_i} .$$

et nous appellerons Δ le premier membre de l'équation (1).

Il s'agit de trouver la condition pour que $\Delta = 0$ ait une racine double, triple...; pour cela il faut exprimer que les équations $\Delta = 0$, $\frac{d\Delta}{ds} = 0, \dots$ ont une racine commune. Les procédés généraux se simplifient dans le cas actuel, quand on

suppose les f_{ji} et les g_{ij} réels. On a en effet

$$\left\{\begin{aligned} \Delta &= (f_{11} + sg_{11}) \frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}} + \ldots + (f_{1n} + sg_{1n}) \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1n}}, \\ 0 &= (f_{21} + sg_{21}) \frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}} + \ldots + (f_{2n} + sg_{2n}) \frac{\partial\Delta}{\partial f_{2n}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

et, en différentiant par rapport à s,

$$\begin{aligned} \Delta' = (f_{11} + sg_{11}) \left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}}\right)' + \ldots + (f_{1n} + sg_{1n}) \left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{1n}}\right)' \\ + g_{11} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}} + \ldots + g_{1n} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1n}}, \\ 0 = (f_{21} + sg_{21}) \left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}}\right)' + \ldots + (f_{2n} + sg_{2n}) \left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{1n}}\right)' \\ + g_{21} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}} + \ldots + g_{2n} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1n}}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

De ces formules on tire en les ajoutant après les avoir multipliées respectivement par $\frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}}$, $\frac{\partial\Delta}{\partial f_{12}}$, ...

$$\Delta' \frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}} = \Delta \left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}}\right)' + \Sigma g_{ij} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1i}} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1j}}.$$

Si donc Δ et Δ' sont nuls à la fois, on aura

$$\Sigma g_{ij} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1i}} \frac{\partial\Delta}{\partial f_{1j}} = 0,$$

ou

$$g\left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{11}}, \frac{\partial\Delta}{\partial f_{12}}, \ldots\right) = 0.$$

et plus généralement

$$g\left(\frac{\partial\Delta}{\partial f_{p1}}, \frac{\partial\Delta}{\partial f_{p2}}, \ldots\right) = 0;$$

et comme l'équation en $\frac{1}{s}$ a aussi une racine double ;

$$f\left(\frac{\partial\Delta}{\partial g_{p1}}, \frac{\partial\Delta}{\partial g_{p2}}, \ldots\right) = 0.$$

Si donc l'une des formes f ou g est définie, la condition cherchée se met sous la forme d'une somme de carrés tous positifs et se décompose en n équations, et même en n^2 équations qui, bien entendu, ne sont pas toutes distinctes.

Il est bon d'observer que les déterminants

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f_{p1}}, \ \frac{\partial \Delta}{\partial f_{p2}} \cdots \ \frac{\partial \Delta}{\partial f_{pn}}$$

dans le cas où l'on a $\Delta = 0$, sont proportionnels aux valeurs de $x_1, x_2 \ldots x_n$ tirées des équations

$$(f_{11} + s g_{11})\, x_1 + \ldots (f_{1n} + s g_{1n})\, x_n = 0,$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$(f_{n1} + s g_{n1})\, x_1 + \ldots (f_{nn} + s g_{nn})\, x_n = 0,$$

qui reviennent à

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \ldots = \frac{f_n}{g_n} = s = \frac{f}{g};$$

en sorte que les équations

$$g\left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{p1}}, \frac{\partial \Delta}{\partial f_{p2}} \cdots\right) = 0, \quad f = 0$$

donnent

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0, \qquad g(x_1, \ldots x_n) = 0.$$

L'interprétation géométrique de ce résultat est que si l'équation qui détermine les points qui ont même plan polaire par rapport à deux surfaces du second ordre a une racine double, un de ces points appartient aux deux surfaces et en ce point les surfaces ont même plan tangent.

Le cas particulier où $g = x_1^2 + x_2^2 + \ldots, + x_n^2$, auquel on peut ramener le cas général au moyen d'une substitution linéaire est particulièrement intéressant.

Car l'équation

$$g\left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{p1}}, \frac{\partial \Delta}{\partial f_{p2}} \cdots\right) = 0$$

se réduit à

$$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{p1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{p2}}\right)^2 + \ldots = 0;$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial \Delta}{\partial f_{pq}} = 0,$$

et l'on voit que tous les mineurs de Δ sont nuls quand $\Delta = 0$ a une racine double.

Mais étudions la question plus à fond ; dans le cas actuel on a

$$\Delta' \frac{\partial \Delta}{\partial f_{11}} - \Delta \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{11}} \right)' = \sum \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{1i}} \right)^2.$$

Si Δ a un facteur de la forme $(s - s_0)^\alpha$, Δ' aura un facteur de la forme $(s - s_0)^{\alpha - 1}$ et comme $\frac{\partial \Delta}{\partial f_{1i}}$ s'annule, le premier membre de l'équation précédente admet le facteur $(s - s_0)^\alpha$, si $\alpha = 3$ les $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{1i}} \right)^2$ admettent ce facteur, ce qui est absurde si les $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{1i}} \right)^2$ n'admettent pas le facteur $(s - s_0)^4$; et alors les $\frac{\partial \Delta}{\partial f_{1i}}$ admettent le facteur $(s - s_0)^2$. Si $\alpha = 4$ les $\frac{\partial \Delta}{\partial f_{1i}}$ admettent le facteur $(s - s_0)^3$, etc. En sorte que si $\Delta = 0$ a une racine d'ordre α, ses mineurs égalés à zéro ont une racine d'ordre $\alpha - 1$.

Mais alors les mineurs des $\frac{\partial \Delta}{\partial f_{ii}}$ ont un facteur d'ordre $\alpha - 2$, et il est facile de voir que tous les mineurs du second ordre de Δ ont le même facteur $(s - s_0)^{\alpha - 2}$: en effet on a

$$\Delta \frac{\partial^2 \Delta}{\partial f_{ii} \partial f_{jj}} = \frac{\partial \Delta}{\partial f_{ii}} \frac{\partial \Delta}{\partial f_{jj}} - \left(\frac{\partial \Delta}{\partial f_{ij}} \right)^2.$$

ce qui met le théorème en évidence. En continuant ainsi on voit que la condition pour que $\Delta = 0$ ait s_0 pour racine d'ordre α, est que les mineurs d'ordre $\alpha - 1$ de Δ égalés à zéro admettent la racine s_0.

L'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) - s\,(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2), \quad p < n$$

conduit à une discussion et à des conclusions analogues ; on la

rencontre dans la théorie des rayons de courbure principaux et dans la détermination des sections circulaires des surfaces du second ordre.

31. **Discriminants.** — On appelle discriminant d'une fonction homogène f et entière de $x_1, x_2 \dots x_n$ le premier membre de la résultante des équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

D'après ce que l'on a vu (p. 52), lorsque le discriminant d'une fonction est nul, ses dérivées sont nulles pour un système de valeurs des variables qui doit annuler le déterminant dont l'élément général est $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, ce déterminant est le hessien de la fonction f.

Le discriminant d'un produit est nul. En effet soit

$$f = uv;$$

on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} v + \frac{\partial v}{\partial x_1} u,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} v + \frac{\partial v}{\partial x_2} u,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Si donc, la fonction f contient plus de deux variables, les équations $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$, ... auront une infinité de solutions car elles seront satisfaites pour $u = 0$, $v = 0$, leur résultant sera donc identiquement nul.

Si la fonction f ne dépend que de p variables $u_1, \dots u_p$, p étant inférieur à n, son discriminant est encore nul.

En effet

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial u_p}\frac{\partial u_p}{\partial x_1},$$

et $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ ont encore une infinité de solutions à savoir celles de $\frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial u_2} = 0$, ... $\frac{\partial f}{\partial u_p} = 0$.

32. **Propriétés des solutions communes**. — On sait que le nombre des termes $N(m, n)$ d'un polynôme du degré m à n variables est donné par la formule

$$N(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}$$

Je rappelle rapidement la démonstration de ce théorème. Le nombre $N(m, n)$ est le nombre des termes d'un polynôme homogène du degré m à $n+1$ variables $x_0, x_1 \dots x_n$. Le nombre total des lettres qu'il contient, en comptant α fois une lettre x^α qui y entre avec l'exposant α est $mN(m, n)$. Alors une lettre x_0 par exemple y entre $\frac{m}{n+1} N(m, n)$ fois. D'un autre côté si des termes qui contiennent x_0, on retranche cette variable, ce seront les termes d'un polynôme du degré $m-1$ à $n+1$ variables et ils contiennent x_0, $\frac{m-1}{n+1}$ fois.

On a donc

$$\frac{m}{n+1} N(m, n) = \frac{m-1}{n+1} N(m-1, n) + N(m-1, n).$$

ou

$$N(m, n) = \frac{m+n}{m} N(m-1, n).$$

et en observant que $N(1, n) = n+1$,
on a

$$N(m, n) = \frac{(m+n)!}{m!\,n!}.$$

On pourra donc assujettir un polynôme du degré m à n variables à $N(m, n)$ conditions, par exemple à prendre $N(m, n)$ systèmes de valeurs données pour $N(m, n)$ systèmes de valeurs des variables.

Les solutions d'un système d'équations en $x_1, x_2 \dots x_n$

(1) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0 \dots \quad f_n = 0$$

des degrés $m_1, m_2 \dots m_n$ respectivement sont multipliées par t quand on multiplie par t^α les coefficients des f qui sont de poids α, les valeurs des inconnues sont donc des fonctions ho-

mogènes en poids, *isobariques* comme on l'a dit quelquefois, des coefficients.

Si dans une équivalence prise suivant les modules $f_1, f_2 \dots f_n$, on remplace $x_1, x_2 \dots x_n$ par les éléments d'une solution de (1), cette équivalence se change en une égalité, puisque les modules deviennent rigoureusement nuls.

L'équivalence

$$(2) \qquad \varphi(x_1, \dots) \equiv \varphi_1 \Omega_1 + \varphi_2 \Omega_2 \dots + \varphi_\mu \Omega_\mu$$

où les Ω sont des polynômes réduits et les φ_i des constantes montre alors que toute fonction entière d'une solution est équivalente à un polynôme entier par rapport à cette solution et dont le degré par rapport à x_1 est $m_1 - 1$, par rapport à x_2 il est $m_2 - 1 \dots$; et il faut bien remarquer qu'en vertu du théorème de Jacobi, le second membre de (2) s'exprime en fonction des coefficients des f; les solutions elles-mêmes n'y apparaissant que virtuellement, et seulement par des fonctions symétriques exprimables en fonction des coefficients des f.

La même chose a lieu pour une fonction rationnelle quelconque. En effet soit $\frac{\varphi}{\psi}$ une pareille fonction, on peut poser

$$g\psi \equiv 1,$$

et par suite $g\psi = 1$ pour $x_1 = \alpha_1 \dots$ donc $g\varphi$ est équivalent à $\frac{\varphi}{\psi}$ et par suite est équivalent à une fonction entière de même nature que φ.

Les solutions d'un système d'équations ne peuvent pas être choisies arbitrairement comme les solutions d'une seule équation. Et en effet le nombre total des coefficients distincts de n équations des degrés $m_1, m_2 \dots m_n$ est

$$\frac{(m_1 + n)!}{m_1!\, n!} + \dots \frac{(m_n + n)!}{m_n!\, n!} - n$$

nombre inférieur à $n . m_1\, m_2 \dots m_n$, nombre des conditions auxquelles il faudrait les assujettir pour exprimer qu'elles admettent $m_1\, m_2 \dots m_n$ solutions données.

L'équation

$$\Omega_1 + \Omega_2 \dots + \Omega_\mu = 1$$

trouvée plus haut, et d'autres analogues, donne en annulant les coefficients des ω, des relations entre les solutions.

On trouve aussi des relations différentielles importantes entre les solutions comme il suit :

Reprenons les équations

$$(1) \qquad f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \dots \; f_n = 0,$$

où $f_1, f_2 \dots f_n$ désignent des polynômes des degrés $m_1, m_2 \dots m_n$ respectivement, désignons toujours par D le déterminant fonctionnel

$$\mathrm{D} = \frac{\partial(f_1, f_2 \dots f_n)}{\partial(x_1, x_2 \dots x_n)}$$

et différentions les équations (1) en faisant varier les coefficients $a_1, a_2 \dots$ de la seule fonction f_1, posons enfin

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial f_1}{\partial a_2} da_2 + \dots$$

nous aurons

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = -\delta f_1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

On en déduit

$$dx_i = -\frac{\delta f_1}{\mathrm{D}} \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}}$$

ou

$$\frac{dx_i}{\left(\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_i}}\right)} = -\frac{\delta f_1}{\mathrm{D}}.$$

Multiplions les deux membres par une fonction entière $\mathrm{F}(x_1, x_2 \dots x_n)$ de degré inférieur à $\Sigma m - m_1 - n$, remplaçons $x_1, x_2 \dots x_n$ par les éléments $\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots \alpha_{nj}$ d'une solution des

équations (1), faisons $j = 1, 2, \dots, \mu = \Pi m$ et ajoutons, nous aurons, en vertu du théorème de Jacobi (§ 19)

$$\sum_i \frac{F(\alpha_1, \dots) d\alpha_{ij}}{\left(\dfrac{\partial D_i}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial \alpha_{ij}}}\right)} = 0 .$$

Ces équations constituant un système de n équations aux différentielles totales qui ne renferment pas les coefficients de la fonction f_1 et qui a pour intégrales les solutions des équations (1), ou si l'on veut les équations (1) elles-mêmes.

33. **Reconnaître si un polynôme est réductible.** — On facilite singulièrement le travail de l'élimination quand on a la bonne fortune de tomber sur des équations dont les premiers membres sont décomposables en facteurs (§ 23). Il est donc désirable d'avoir un criterium qui permette de décider si un polynôme est ou n'est pas irréductible ; et dans le cas où il n'est pas irréductible, de pouvoir le décomposer en facteurs. C'est l'objet des considérations suivantes.

Soient

$$f_1(x_1) = 0, \; f_2(x_2) = 0, \; \dots \; f_n(x_n) = 0,$$

n équations algébriques ne contenant chacune qu'une seule variable, et que, pour fixer les idées, nous supposerons de même degré m, quoique cela n'ait rien d'essentiel. Nous supposerons

$$f_i(x_i) = (x_i - \alpha_{1i})(x_2 - \alpha_{2i}) \dots (x_n - \alpha_{ni})$$

les racines α_{ij} pouvant être quelconques, de préférence entières et positives, mais inégales. Nous poserons

$$\frac{f_i(x_i)}{(x_i - \alpha_{ji}) f'_i(\alpha_{ji})} = u_{ij} .$$

et nous aurons

$$u_{ij} u_{ik} = \frac{f_i(x_i)}{\alpha_{ji} - \alpha_{jk}} \left[\frac{1}{f'(\alpha_{ji})} u_{ij} - \frac{1}{f'(\alpha_{ki})} u_{ik} \right].$$

Si nous désignons alors par $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_\mu$ les $\mu = m^n$ facteurs de la forme

$$u_{1p}\, u_{2q} \ldots u_{ns},$$

où $p, q, \ldots s$ peuvent prendre toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$. Le produit $\xi_i \xi_j$ pourra se mettre sous la forme

$$(1) \qquad \xi_i \xi_j = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n) \Xi_{ij},$$

Ξ_{ij} désignant une fonction linéaire à coefficients constants des ξ.

Les fonctions ξ sont des cas particuliers des fonctions interpolaires considérées plus haut, paragraphe 71. Je suppose que l'on ait formé toutes les équations telles que (1) et que tous les polynômes Ξ aient été calculés.

En éliminant entre toutes les équations analogues à (1) les quantités ξ, ou, ce qui revient au même, $\xi f_1 f_2 \ldots f_n$, on aura sans peine, une série de $\mu^2 - \mu$ relations entre les produits $\xi_i \xi_j$ *et ces relations seront linéaires*, et à coefficients constants.

Ainsi, tandis qu'entre les ξ il n'existe pas de relation linéaire homogène, il en existe entre leurs produits $\xi_i \xi_j$.

Considérons maintenant un polynôme $F(x_1, x_2 \ldots x_n)$ de degré inférieur à m, on pourra (§ 71) le mettre sous la forme

$$(2) \qquad F = a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \ldots + a_\mu \xi_\mu,$$

$a_1, a_2 \ldots$ désignant des quantités indépendantes des x. S'il est décomposable en deux facteurs, chacun de ses facteurs pourra lui-même se mettre sous la forme

$$b_1 \xi_1 + b_2 \xi_2 \ldots + b_\mu \xi_\mu,$$
$$c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 \ldots + c_\mu \xi_\mu,$$

et le polynôme F pourra encore se mettre sous la forme d'un polynôme du second degré en $\xi_1, \xi_2 \ldots$ à savoir

$$(3) \qquad F = \Sigma\, b_i c_j \xi_i \xi_j.$$

Mais en multipliant membre à membre les équations (2) et

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_\mu,$$

on aura aussi

$$F = \Sigma\,(a_i + a_j)\,\xi_i\,\xi_j\,. \tag{4}$$

Sous la forme (4), comme sous la forme (1) le polynôme F considéré comme fonction des ξ sera une somme de deux carrés ; mais il existe comme on l'a vu $\mu^2 - \mu$ relations identiques de la forme

$$\Sigma\,\varpi_{ij}\,\xi_i\,\xi_j = 0\,;$$

en sorte que tout polynôme F peut se mettre sous la forme

$$F = \Sigma\,[a_i + a_j + \Sigma\,\varepsilon_h\,\varpi_{ijh}]\,\xi_i\,\xi_j\,; \tag{5}$$

les ε et les ϖ_{ijk} étant des constantes, et les ε sont arbitraires.

Sous la forme générale (5), F pourra ne plus être décomposable en deux carrés quels que soient les ε, mais s'il existe un seul système des ε non tous nuls permettant de décomposer F en une somme de deux carrés, le polynôme F considéré comme fonction des x sera lui-même une somme de deux carrés, et par suite ne sera pas irréductible.

Pour exprimer que le polynôme sous sa forme (5) est une somme de deux carrés, on aura à écrire une série d'équations du troisième degré par rapport aux ε, qui devront être satisfaites, on rejettera d'ailleurs les systèmes où tous les ε seraient nuls.

Le moyen que nous proposons pour décider si un polynôme est décomposable en facteurs, n'est évidemment pas très pratique, c'est là un inconvénient, mais il a l'avantage de préciser l'ordre de la difficulté à vaincre, et de montrer que les opérations à faire sont d'ordre algébrique, enfin que l'on peut, à la rigueur, les effectuer.

Il serait bien à désirer que l'on pût, pour des fonctions interpolaires quelconques, trouver les relations linéaires qui existent entre les $\xi_i\,\xi_j$, mais c'est là une question qui me semble hérissée de difficultés.

34. **Développement en série.** — Liouville a fait connaître dans son journal une méthode qui permet de développer en série une fonction des solutions d'un système d'équations et par suite les résultants.

Nous donnerons une idée de cette méthode en considérant trois équations

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \chi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0,$$

de degrés m, n, p. Si l'on décompose φ, χ, ψ en groupes homogènes, on peut écrire ces équations

$$\begin{aligned} &\varphi_m(x, y, z) + \varphi_{m-1}(x, y, z) + \ldots = 0, \\ &\chi_n(x, y, z) + \chi_{n-1}(x, y, z) + \ldots = 0, \\ &\psi_p(x, y, z) + \psi_{p-1}(x, y, z) + \ldots = 0, \end{aligned}$$

l'indice placé au bas d'une lettre indiquant le degré du polynôme représenté par cette lettre.

Posons $y = \alpha x$, $z = \beta x$, ces équations deviendront

$$\begin{aligned} &(1) \quad \varphi_m(\alpha, \beta) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}(\alpha, \beta) + \frac{1}{x^2}\varphi_{m-2}(\alpha, \beta) \ldots = 0, \\ &(2) \quad \chi_n(\alpha, \beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ &(3) \quad \psi_p(\alpha, \beta) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0. \end{aligned}$$

Pour $x = \infty$, les équations (1) et (2) se réduisent à $\varphi_m(\alpha, \beta) = 0$, $\chi_n(\alpha, \beta) = 0$, et si l'on suppose α_1 et β_1 solutions de ces équations, on pourra poser

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x}, \qquad \beta = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x};$$

(1) et (2) deviendront alors

$$\varphi_m\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x}, \beta_1 + \frac{\beta_2}{x}\right) + \frac{1}{x}\varphi_{m-1}\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x}, \beta_1 + \frac{\beta_2}{x}\right) + \ldots = 0,$$

. . . .

ou en observant que $\varphi_m(\alpha_1, \beta_1) = 0$, $\psi_n(\alpha_1, \beta_1) = 0$,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_1}\alpha_2 + \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}\beta_2 + \varphi_{m-1}(\alpha_1, \beta_1) \\ &+ \frac{1}{2x}\left[\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha_1^2}\alpha_2^2 + 2\frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\alpha_1\partial\beta_1}\alpha_2\beta_2 + \frac{\partial^2\varphi_m}{\partial\beta_1^2}\beta_2^2 \right. \\ &\left. + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\alpha_1}\alpha_2 + \frac{\partial\varphi_{m-1}}{\partial\beta_1}\beta_2 + \varphi_{m-2}(\alpha_1\beta_1)\right] + \ldots = 0, \end{aligned}$$

. . . .

dans une première approximation, on pourra prendre

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_1}\alpha_2 + \frac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}\beta_2 &= -\varphi_{m-1},\\ \frac{\partial\chi_n}{\partial\alpha_1}\alpha_2 + \frac{\partial\chi_n}{\partial\beta_1}\beta_2 &= -\chi_{n-1};\end{aligned}\right.$$

et l'on posera

$$\alpha = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x} + \frac{\alpha_3}{x^2},$$

$$\beta = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x} + \frac{\beta_3}{x^2};$$

en portant ces valeurs dans (1) et (2), on déterminera α_3, β_3 et ainsi de suite. Portant ces valeurs dans

$$\Pi\,[\psi_p(\alpha,\beta) + \ldots],$$

on aura le résultant

$$\Pi\left[\psi\left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{x} + \ldots, \beta_1 + \frac{\beta_2}{x}, \ldots\right) + \frac{1}{x}\psi_{p-1}(\ldots)\ldots\right],$$

ou

$$\Pi\left[\psi_p(\alpha_1, \beta_1) + \frac{1}{x}\left(\frac{\partial\psi_p}{\partial\alpha_1}\alpha_2 + \frac{\partial\psi_p}{\partial\beta_1}\beta_2 + \psi_{p-1}(\alpha_1,\beta_1)\right) + \ldots\right].$$

Le premier terme du résultant sera

$$x^{mnp}\,\Pi\psi_p(\alpha_1,\beta_1).$$

Le second terme sera

$$x^{mnp-1}\,\Pi\psi_p(\alpha_1,\beta_1)\sum\left[\frac{\partial\psi_p}{\partial_1\alpha}\alpha_2 + \frac{\partial\psi_p}{\partial\beta_1}\beta_2 + \psi_{p-1}(\alpha_1,\beta_1)\right] \times \frac{1}{\psi_p(\alpha_1,\beta_1)}.$$

Si l'on y remplace α_2 et β_2 par leurs valeurs tirées de (4), à savoir

$$\alpha_2 = \frac{\varphi_{m-1}\dfrac{\partial\chi_n}{\partial\beta_1} - \chi_{m-1}\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}}{\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_1}\dfrac{\partial\chi_n}{\partial\beta_1} - \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}\dfrac{\partial\chi_n}{\partial\alpha_1}},\ldots$$

on trouve

$$x^{mnp-1}\,\Pi\,\psi_p(\alpha_1,\beta_1)\sum\begin{vmatrix}\varphi_{m-1} & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}\\ \chi_{n-1} & \dfrac{\partial\chi_n}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\chi_n}{\partial\beta_1}\\ \psi_{p-1} & \dfrac{\partial\psi_p}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\psi_p}{\partial\beta_1}\end{vmatrix}$$

$$:\psi_p(\alpha_1\beta_1)\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial\beta_1}\\ \dfrac{\partial\chi_n}{\partial\alpha_1} & \dfrac{\partial\chi_n}{\partial\beta_1}\end{vmatrix}.$$

On connaît, par suite, la somme des racines de l'équation résultante.

On déduit de cette formule des identités en permutant les rôles des fonctions φ, χ, ψ. Il resterait à examiner les conditions de convergence des séries dont on a fait usage, mais la question n'a pas été soulevée par Liouville et elle paraît assez difficile à traiter.

35. **Extension partielle aux équations transcendantes.** — Considérons deux équations quelconques algébriques ou transcendantes

$$(1)\qquad \varphi(x)=0,\qquad \psi(x)=0.$$

Supposons $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ monodromes, éliminer x entre ces équations, c'est exprimer qu'elles ont une solution commune. Or, les racines de $\varphi(x)=0$ comme celles de $\psi(x)=0$ sont en général en nombre infini et α_1, $\alpha_2\ldots$ désignant par exemple celles de $\varphi(x)=0$. Le symbole

$$\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\,\psi(\alpha_3)\ldots$$

ne présentera le plus souvent aucun sens. Dans certains cas particuliers, ce produit pourra être convergent ou rendu convergent en divisant chaque facteur $\psi(\alpha_i)$ par un nombre convenablement choisi et suffisamment grand ; mais dans la pratique, si l'on ne sait pas résoudre l'équation $\varphi=0$, le procédé que nous indiquons sera même théoriquement impraticable. Est-il possible d'exprimer en général que les équations (1) ont

une solution commune ? Je ne le crois pas, mais il est possible de trouver la condition pour que dans une aire finie donnée, elles aient une solution commune, pourvu que dans cette aire ψ et φ n'aient pas de point singulier.

En effet, on sait que pour un pareil contour

$$\Sigma\varphi(\alpha) = \mathcal{E}\,\frac{\psi(z)\,\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

le résidu pouvant se transformer de bien des manières en intégrale définie ; la condition cherchée peut se mettre sous la forme suivante

$$\psi(\alpha_1)\,\psi(\alpha_2)\ldots\psi(\alpha_n) = 0,$$

ou (§ 6)

$$\frac{\left|\begin{array}{lll} \mathcal{E}\,\dfrac{\psi(z_1)\,\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}, & \mathcal{E}\,\dfrac{\psi(z_2)\,\varphi'(z_2)\,z_2}{\varphi(z_2)}, & \ldots \\ \mathcal{E}\,\dfrac{\psi(z_1)\,\varphi'(z_1)\,z_1}{\varphi(z_1)}, & \mathcal{E}\,\dfrac{\psi(z_2)\,\varphi'(z_2)\,z_2^2}{\varphi(z_2)}, & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{lll} \mathcal{E}\,\dfrac{\varphi'(z_1)}{\varphi(z_1)}, & \mathcal{E}\,\dfrac{\varphi'(z_2)\,z_2}{\varphi(z_2)}, & \ldots \\ \mathcal{E}\,\dfrac{\varphi'(z_1)\,z_1}{\varphi(z_1)}, & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}\right|} = 0,$$

ou

$$\frac{\mathcal{E}\mathcal{E}\mathcal{E}\ldots\dfrac{\psi(z_1)\,\psi(z_2)\ldots\varphi'(z_1)\,\varphi'(z_2)\ldots}{\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots}\,\Delta}{\mathcal{E}\mathcal{E}\mathcal{E}\ldots\dfrac{\varphi'(z_1)\,\varphi'(z_2)\ldots}{\varphi(z_1)\,\varphi(z_2)\ldots}\,\Delta} = 0,$$

Δ désignant le produit des différences des quantités $z_1, z_2 \ldots z_n$. Cette méthode suppose seulement que l'on a déterminé le nombre

$$n = \mathcal{E}\,\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

APPENDICE

J'ai regardé comme connue cette proposition, que : les solutions d'un système d'équations, sont des fonctions continues des paramètres qu'elles renferment. Un certain nombre de géomètres semblent croire que cette proposition n'est pas susceptible d'une démonstration élémentaire ; ainsi, dans les programmes des examens d'admission à l'École Polytechnique, il est spécifié que *l'on admet* que les fonctions implicites sont *continues* et *ont des dérivées*. Je me permets donc de donner ici une démonstration très élémentaire de cette proposition.

Considérons d'abord une équation

$$f(x, y) = 0.$$

Si x_0, y_0 est une solution et si $\frac{df}{dx_0}$, $\frac{df}{dy_0}$ existent et sont finis (ce qui a lieu si f est un polynôme), y sera évidemment fonction continue de x pour $x = 0$. En effet, si l'on considère l'expression $f(x_0, y_0 + k)$, on a

$$f(x_0, y_0 + k) = kf'_y(x_0, y_0 + \theta k), \quad 0 < \theta < 1,$$

ce qui montre que si k est assez petit, $f(x_0, y_0 + k)$ est de même signe que $kf'_y(x_0, y_0)$; donc si $f'_y(x_0, y_0)$ n'est pas nul, $f(x_0, y_0 - k)$ et $f(x_0, y_0 + k)$ sont de signes contraires, or, on peut prendre h assez petit pour que $f(x_0 + h, y_0 - k)$ soit de même signe que $f(x_0, y_0 - k)$ et que $f(x_0 + h, y_0 + k)$ soit de même signe que $f(x_0, y_0 + k)$; alors $f(x_0 + h, y_0 + k)$ et $f(x_0 + h, y_0 - k)$ étant de signes contraires, il existera une valeur de y comprise entre $y_0 + k$ et $y_0 - k$ telle que $f(x_0 + h, y) = 0$. Donc, quand on donnera à x_0 un accroissement suffisamment petit, y_0 subira un accroissement moindre que k, ce qui démontre la continuité de y.

Si l'on a plusieurs équations

$$(1) \qquad f_1(x_1 y_1, y_2 \dots y_n) = 0, \dots f_n(x_1, y_1, \dots y_n) = 0$$

la première définit une fonction y_1 continue de x_1 $y_2, \dots y_n$: en en portant la valeur de y_1 dans les autres, on aura

$$f_2(x_1 y_2 \dots y_n) = 0 \dots$$

la première définit une fonction y_2 continue de $x_1 y_3, .. y_n$ et ainsi de suite, donc y_n est fonction continue de x.

Nous avons supposé les solutions réelles, mais si elles sont imaginaires ainsi que x, les équations se dédoubleront en équations réelles entre les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$, les parties réelles des solutions et les autres parties de ces solutions seront des fonctions continues des parties réelles et des autres parties des paramètres, donc, etc.

La démonstration qui précède met en évidence les cas particuliers où ces conclusions sont inexactes.

La continuité des fonctions y entraîne l'existence de leurs dérivées, les équations (1) donnent en effet, en faisant croître x de Δx

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} \Delta x + \sum \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \Delta y_j = 0,$$

formules où l'on doit supposer x, $y_1 \ldots$ remplacés par $x + \theta \Delta x$, $y_1 + \theta \Delta y_1 \ldots$ et $0 < \theta < 1$. On en déduit les $\frac{\Delta y_j}{\Delta x}$ et leurs limites obtenues en vertu de la continuité des y en faisant les Δy nuls avec Δx.

ÉVREUX, IMPRIMERIE DE CHARLES HÉRISSEY

